

Nagyhatékonyságú deklaratív programozás (labor)

Szeredi Péter, Kabódi László

BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

2021 tavasz

- Prolog alapok
- Haladó Prolog ismeretek
- A CLP (Constraint Logic Programming) irányzat áttekintése
- A SICStus clpq/r könyvtárai
- A SICStus clpb könyvtára
- A SICStus clpfd könyvtára
- A SICStus chr könyvtára
- A Mercury programozási nyelv

Háttéranyagok

- Információk a korlát-logikai programozásról
 - „Az első alapkönyv”: Pascal Van Hentenryck: Constraint Satisfaction in Logic Programming, MIT Press, 1989
 - Kim Mariott, Peter J. Stuckey, Programming with Constraints: an Introduction, MIT Press 1998
 - On-line Guide to Constraint Programming, by Roman Barták (<http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/constraints/>)
 - Krzysztof R. Apt, Mark G. Wallace, Constraint logic programming using ECLiPSe https://www.researchgate.net/publication/220693610_Constraint_logic_programming_using_ECLiPSe
- Információk a Mercury nyelvről
 - Honlap: <http://mercurylang.org>

A CLP alapgondolata

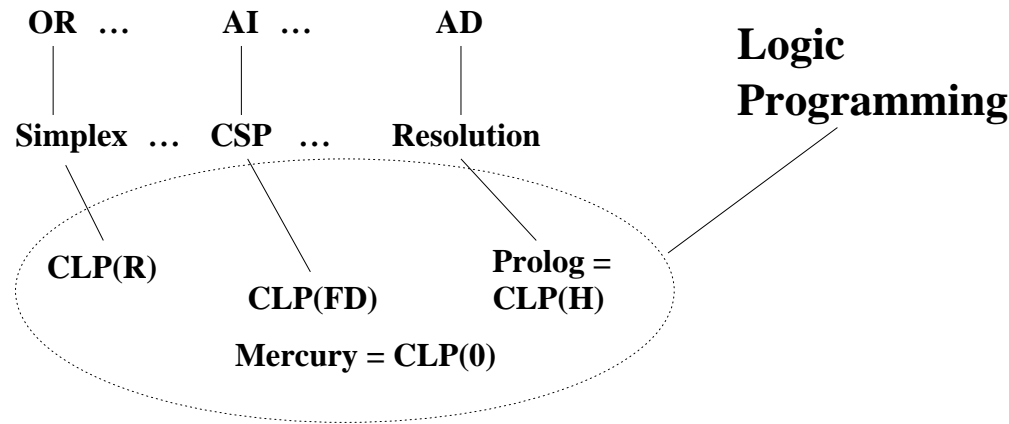
- A $CLP(\mathcal{X})$ séma

Prolog

+

egy valamilyen \mathcal{X} adattartományra és azon értelmezett korlátokra (relációkra) vonatkozó „erős” következtetési mechanizmus

- Példák az \mathcal{X} tartomány megválasztására
 - $\mathcal{X} = \mathbb{Q}$ vagy \mathbb{R} (a racionális vagy valós számok)
korlátok: lineáris egyenlőségek és egyenlőtlenségek
következtetési mechanizmus: Gauß elimináció, simplex módszer
 - $\mathcal{X} = \text{FD}$ (egész számok Véges Tartománya, FD — Finite Domain)
korlátok: különféle aritmetikai és kombinatorikus relációk
következtetési mechanizmus: MI CSP-módszerek (CSP = Korlát-Kielégítési Probléma)
 - $\mathcal{X} = \text{B}$ (0 és 1 Boole értékek)
korlátok: ítéletkalkulusbeli relációk
következtetési mechanizmus: MI SAT-módszerek (SAT — Boole kielégíthetőség)



- Egy miniatűr kvázi-CLP nyelv természetes számokra (Motiváció: a CLP alapelvek és egyben a haladó Prolog lehetőségek bemutatása.)
 - Tartomány: Nem negatív egészek
 - Függvények:
 - + - *
 - Korlát-relációk:
 - = < > =< >=
 - Korlát-megoldó algoritmus:
 - a Prolog korutin-kiterjesztésén alapul
- A Prologba ágyazás szintaxisa:
 - {Korlát} a Korlát felvétele
 - ({X}) szintaktikus édesítőszer, ekvivalens a ' {} ' (X) kifejezéssel.)

Példa: CLP(MiniNat)

Példafutás

```
| ?- {X+Y = 2}.
X = 2, Y = 0 ? ;
X = 1, Y = 1 ? ;
X = 0, Y = 2 ? ;
no
| ?- {2*X+3*Y=8}.
X = 4, Y = 0 ? ;
X = 1, Y = 2 ? ;
no
| ?- {X*2+1=28}.
no
| ?- {X*X+Y*Y=25, X > Y}.
X = 5, Y = 0 ? ;
X = 4, Y = 3 ? ;
no
```

I. rész

Prolog alapok

- 1 Prolog alapok
- 2 A SICStus clp(Q,R) könyvtárai
- 3 A SICStus clp(B) könyvtára
- 4 A CLP elméleti háttere
- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
- 6 CHR – Constraint Handling Rules
- 7 A Mercury LP megvalósítás

1 Prolog alapok

- Bevezető példa
- Beépített eljárások
- A Prolog adatfogalma
- A Prolog nyelv alapszintaxisa
- Haladó Prolog: korutin-szervezés
- Első példánk CLP rendszerre: CLP(MiniNat)
- 1. kis házi feladat

• Adatok

- Adottak személyekre vonatkozó állítások, pl.

„gyerek–szülő” tábla

gyerek	szülő
Imre	István
Imre	Gizella
István	Géza
István	Sarolta
Gizella	Civakodó Henrik
Gizella	Burgundi Gizella

„férfiak” tábla

férfi
Imre
István
Géza
Civakodó Henrik

• A feladat:

- Definiálandó az unoka–nagyözülő kapcsolat

A nagyözülő feladat — Prolog megoldás

```
% szuloje(Gy, Sz):Gy szülője Sz.
% Tényállításokból álló predikátum
szuloje('Imre', 'Gizella'). % (sz1)
szuloje('Imre', 'István'). % (sz2)
szuloje('István', 'Sarolta'). % (sz3)
szuloje('István', 'Géza'). % (sz4)
szuloje('Gizella',
        'Burgundi Gizella'). % (sz5)
szuloje('Gizella',
        'Civakodó Henrik'). % (sz6)

% ffi(Szemely): Szemely férfi.
ffi('Imre'). ffi('István'). % (f1)-(f2)
ffi('Géza'). % (f3)
ffi('Civakodó Henrik'). % (f4)

% Gyerek nagyözülője Nagyszulo.
% Egyetlen szabályból álló predikátum
nagyozuloje(Gyerek, Nagyszulo) :-
    szuloje(Gyerek, Szulo),
    szuloje(Szulo, Nagyszulo). % (nsz)
```

```
% Ki Imre nagyapja?
| ?- nagyozuloje('Imre', NA),
    ffi(NA).
NA = 'Civakodó Henrik' ? ;
NA = 'Géza' ? ;
no
% Ki Géza unokája?
| ?- nagyozuloje(U, 'Géza').
U = 'Imre' ? ;
no
% Ki Imre nagyözülője?
| ?- nagyozuloje('Imre', NSz).
NSz = 'Burgundi Gizella' ? ;
NSz = 'Civakodó Henrik' ? ;
NSz = 'Sarolta' ? ;
NSz = 'Géza' ? ;
no
```

Deklaratív szemantika – klózek logikai alakja

- A **szabály** jelentése implikáció: a törzsbeli célok **konjunkciójából** következik a fej.
 - Példa: $\text{nagyozuloje}(U, N) :- \text{szuloje}(U, Sz), \text{szuloje}(Sz, N)$.
 - Logikai alak:

$$\forall U, N, Sz (\text{nagyozuloje}(U, N) \leftarrow \text{szuloje}(U, Sz) \wedge \text{szuloje}(Sz, N))$$
 - Ekvivalens alak:

$$\forall U, N (\text{nagyozuloje}(U, N) \leftarrow \exists Sz (\text{szuloje}(U, Sz) \wedge \text{szuloje}(Sz, N)))$$
- A **tényállítás** feltétel nélküli állítás, pl.
 - Példa: $\text{szuloje}('Imre', 'István')$.
 - Logikai alakja változatlan
 - Ebben is lehetnek változók, ezeket is univerzálisan kell kvantálni
- A **célsorozat** jelentése: keressük azokat a változó-behelyettesítéseket amelyek esetén a célok konjunkciója igaz
- Egy célsorozatra kapott válasz **helyes**, ha az adott behelyettesítésekkel a célsorozat következménye a program logikai alakjának
- A Prolog garantálja a helyességet, de a **teljességet** nem: nem biztos, hogy minden megoldást megkapunk – kaphatunk hibajelzést, végtelen ciklust, végtelen keresési teret stb.

A Prolog végrehajtás alaplépése, az ún. redukciós lépés

- Redukciós lépés: egy célsorozat redukálása egy újabb célsorozattá, egy programklóz (pl. az `(nsz)`) segítségével:

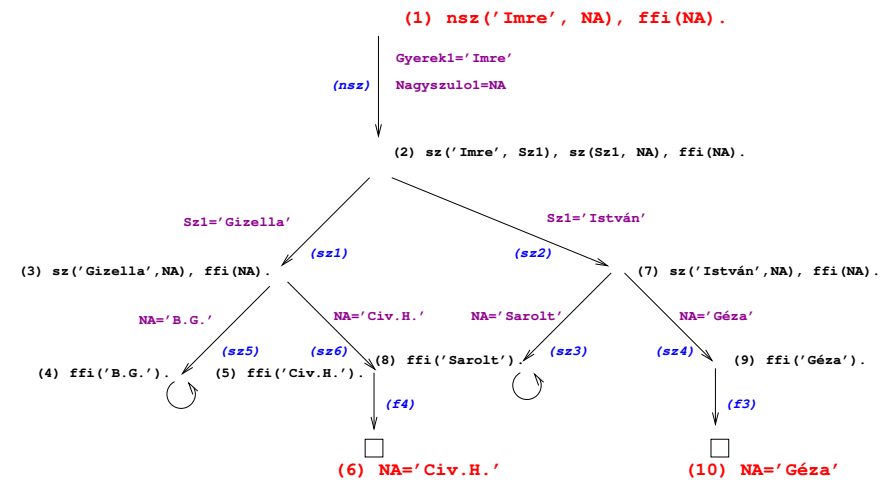

```
| ?- nsz('Imre', NA), ffi(NA).           (kc)  kezdeti célsorozat
| ?- sz('Imre', Sz1), sz(Sz1, NA), ffi(NA). (rc)  redukált célsorozat
```

 (A fenti esetben $(kc) \equiv (rc)$, általánosan $(kc) \Leftarrow (rc)$.)
- Részletesen: a klózt **lemásoljuk**, a változókat újakra cserélve, pl.


```
nsz(Gy1, Nsz1) :- sz(Gy1, Sz1), sz(Sz1, Nsz1).
```
- A célsorozatot (pl. (kc)), szétbontjuk az első hívásra és a maradékra, pl. első hívás: `nsz('Imre', NA)`, maradék: `ffi(NA)`.
- Az **első hívást egyesítjük** a **klózfejjel**, azaz a két kifejezést azonos alakra hozzuk (mintaillesztés):
 behelyettesítés: `Gy1 = 'Imre'`, `Nsz1 = NA`, közös alak: `nsz('Imre', NA)`
- Ha az egyesítés nem sikerül, akkor a redukciós lépés is meghiúsul.
- Sikeres egyesítés esetén az ehhez szükséges behelyettesítéseket elvégezzük a klóz **törzsén** és a **célsorozat** maradékán is
 törzs: `sz('Imre', Sz1), sz(Sz1, NA)`, maradék célsorozat: `ffi(NA)`
- Az új célsorozat: a **klóztörzs** és utána a **maradék célsorozat**, ld. fent (rc)

A nagyszülő példa végrehajtása – keresési tér

```
nsz(Gyerek, Nagyszulo) :-
  sz(Gyerek, Szulo),
  sz(Szulo, Nagyszulo).           % (nsz)
```



A Prolog végrehajtási algoritmus – megjegyzések

- A keresési fában a nyilak a redukció (visszavezetés) irányát mutatják, de ...
- Az implikáció alulról felfelé irányul, pl. $(3) \Rightarrow (2)$ és $(7) \Rightarrow (2)$.
- A végrehajtás nem „intelligens”
 - Pl. `| ?- nagyszuloje(U, 'Géza')`. hatékonyabb lenne ha a klóz törzsét **jobbról balra** hajtánánk végre
 - DE: így a végrehajtás átlátható; a Prolog nem tételbizonyító, hanem programozási nyelv

A redukciós modell alapfogalmai

- A végrehajtás bemenete:
 - egy Prolog program (klózek sorozata), pl. a `nagyszuloje` program, és
 - egy célsorozat, pl. `:- nsz(im, Sz)`.
a megoldás értelmezése érdekében ezt egy utolsó, `answer(Megoldás)` fiktív céllal bővítjük ki, pl.


```
:- nsz(im, NSz), answer(NSz).           % Kik Imre nagyszülei?
:- sz(Gy, Sz), answer(Gy-Sz).         % Mik a gyerek-szülő párok?
```
- Az `answer(...)` cél segítségével követhetjük a megoldás felépülését
- Ha a célsorozat már csak az `answer` célt tartalmazza, akkor eljutottunk egy megoldáshoz (ezt a szerepet korábban az üres célsorozat játszotta)
- Az `answer` csak egy elméleti eszköz, nem beépített elj., de definálhatjuk, így: `answer(M) :- write(M), nl, fail.`
- A végrehajtásnak többféle kimenetele lehetséges:
 - Hiba (kivétel, exception), pl. `:- Y = alma, X is Y+1.`
(Ezzel most nem foglalkozunk részletesebben.)
 - Meghiúsulás (nincs megoldás), pl. `:- sz(ge, Sz), answer(Sz).`
 - Siker (1 vagy több megoldás), pl. `:- sz(im, Sz), answer(Sz).`

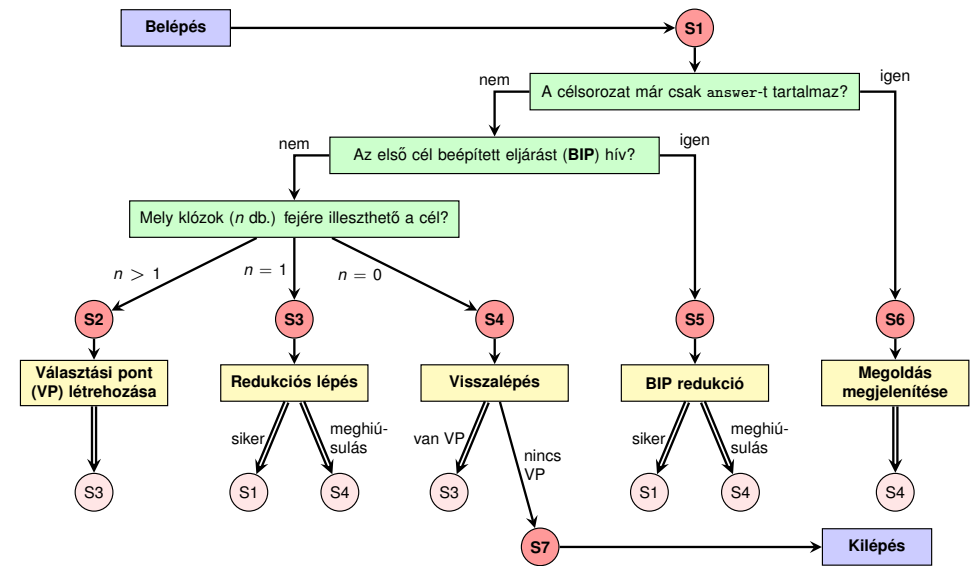
A redukciós végrehajtás alapfogalmai (folyt.)

- A végrehajtás által használt (imperatív!) adatstruktúrák:
 - a jelenlegi célsorozatot tartalmazó változó (Goal)
 - a választási pontokat (VP) tartalmazó verem (Choice point stack)
- A VP verem akkor mélyül, ha 2 vagy több klózzal lehet redukálni
 - a redukció előtt a veremre elmentjük a célsorozatot és a redukcióban használható klózok listáját, majd folytatjuk a végrehajtást
 - ennek meghiúsulása esetén
 - a veremben tárolt klózlistából elhagyjuk az első elemet,
 - ha ezután már csak egyelemű a klózlista, megszüntetjük a VP-t,
 - a klózlistában most első klózzal folytatjuk a redukciót.
 - ha meghiúsuláskor üres a VP-verem \Rightarrow kimerítettük a keresési teret
- Például a `nsz(im, NA)`, `ffi(NA)`, `answer(NA)` célsorozat végrehajtásakor az alábbi VP verem jön léte:

Choice point stack

ChPoint name	Clause list		Goal
CHP2	[sz5,sz6]	(3)	<code>sz(gi, NA), ffi(NA), answer(NA).</code>
CHP1	[sz1,sz2]	(2)	<code>sz(im, Sz), sz(Sz, NA), ffi(NA), answer(NA).</code>

A redukciós modell folyamatábrája (összes megoldás előállítás)



(A kettős nyilak jelentése: ugrás a rózsaszínű körben megadott lépésre, azaz folytatás az adott piros körnél.)

Megjegyzések a folyamatábrához

- Hétféle végrehajtási lépésünk van: **S1–S7**, ahol **S1** a kiindulási pont (de közbülső is), **S7** a végállapot.
- **S1** alapvető feladata az elágaztatás **S2–S6** egyikére
 - ha `Goal` már csak az `answer` elemet tartalmazza \Rightarrow **S6**;
 - ha az első cél beépített eljárást hív \Rightarrow **S5**;
 - egyébként az első cél felhasználói eljárást hív. Ekkor megvizsgáljuk (esetleg csak közelítően), hogy az eljárás mely klózainak fejére illeszthető az első cél, és ezek száma (n) szerint \Rightarrow **S2**, **S3** vagy **S4**.
- **S2** létrehoz egy VP-t, majd az első klózzal redukál (\Rightarrow **S3**).
- **S3** meghiúsulhat, ha **S1**-ben n csak közelítés volt, ilyenkor \Rightarrow **S4**.
- **S4**-ben a VP-ban eltárolt következő klózzal redukálunk, ha van ilyen (\Rightarrow **S3**), egyébként befejezzük a végrehajtást (\Rightarrow **S7**).
- **S5** az **S3** lépéssel analóg módon vagy \Rightarrow **S1**, vagy \Rightarrow **S4**.
- **S6**-ban a megoldás megjelenítése után visszalépéssel folytatjuk (\Rightarrow **S4**, további megoldások keresése).

Tartalom

- 1 Prolog alapok
 - Bevezető példa
 - Beépített eljárások
 - A Prolog adatfogalma
 - A Prolog nyelv alapszintaxisa
 - Haladó Prolog: korutin-szervezés
 - Első példánk CLP rendszerre: CLP(MiniNat)
 - 1. kis házi feladat

Aritmetikai beépített eljárások

Aritmetikai beépített eljárások (predikátumok)

- $X \text{ is Kif}$: A Kif **aritmetikai** kif.-t **kiértékeli** és értékét **egyesíti** X -szel.
- $Kif1 > Kif2$: $Kif1$ **aritmetikai értéke** nagyobb $Kif2$ értékénél.
- Hasonlóan: $Kif1 = < Kif2$, $Kif1 > Kif2$, $Kif1 >= Kif2$, $Kif1 = = Kif2$ (aritmetikailag egyenlő), $Kif1 \neq Kif2$ (aritmetikailag nem egyenlő)
- Fontos aritmetikai operátorok: +, -, *, /, rem, // (egész-osztás)

A faktoriális függvény definíciója Prologban

- funk. nyelven a faktoriális 1-argumentumú függvény: $Ered = fakt(N)$
- Prologban ennek egy kétargumentumú reláció felel meg: $fakt(N, Ered)$
- Konvenció: az utolsó argumentum(ok) a kimenő paraméter(ek)

```
% fakt(N, F): F = N!.
fakt(0, 1).           % 0! = 1.
fakt(N, F) :-        % N! = F ha létezik olyan N1, F1, hogy
    N > 0,           % N > 0, és
    N1 is N-1,       % N1 = N-1. és
    fakt(N1, F1),    % N1! = F1, és
    F is F1*N.       % F = F1*N.
```

Néhány további beépített eljárás

- Kifejezések egyesítése
 - $X = Y$: az X és Y **szimbolikus** kifejezések egyesítése \equiv azonos alakra hozása változók esetleges behelyettesítésével, a lehető legáltalánosabb módon
 - $X \neq Y$: az X és Y kifejezések **nem** egyesíthetőek (nem hozhatók azonos alakra)
- Típusvizsgálatot végző beépített predikátumok
 - $var(X)$: X változó
 - $nonvar(X)$: X nem változó
 - $atomic(X)$: X konstans;
 - $atom(X)$: X névkonstans, $number(X)$: X szám
 - $integer(X)$: X egész szám, $float(X)$: X lebegőpontos szám
 - $compound(X)$: X összetett kifejezés
- További hasznos predikátumok
 - $true, fail$: Mindig sikerül ill. mindig meghiúsul.
 - $write(X)$: Az X Prolog kifejezést kiírja.
 - $write_canonical(X)$: X kanonikus (alapstruktúra) alakját írja ki.
 - nl : Kiír egy újsort.

Programfejlesztési beépített eljárások

- $consult(File)$: A $File$ állományban levő programot beolvassa és értelmezendő alakban eltárolja. ($File = user \Rightarrow$ terminálról olvas.)
- $compile(File)$: mint $consult$, csak kompilált alakban tárol (gyorsabb kód, de egyes eljárások nem nyomkövethetők)
- $trace, notrace$: A (teljes) nyomkövetést be- ill. kikapcsolja.
- $listing$ vagy $listing(Predikátum)$: Az értelmezendő alakban eltárolt összes ill. adott nevű predikátumokat kilistázza.
- $halt$: A Prolog rendszer befejezi működését.

```
> sicstus
SICStus 4.4.1 (x86_64-linux-glibc2.12) ...
| ?- consult(fakt).
% consulted /home/user/fakt.pl in module user, 10 msec 91776 bytes
yes
| ?- fakt(4, F).
F = 24 ? ;
no
| ?- listing(fakt).
(...)
yes
| ?- halt.
>
```

Tartalom

- 1 Prolog alapok
 - Bevezető példa
 - Beépített eljárások
 - A Prolog adatfoglalma
 - A Prolog nyelv alapszintaxisa
 - Haladó Prolog: korutin-szervezés
 - Első példánk CLP rendszerre: CLP(MiniNat)
 - 1. kis házi feladat

A Prolog adatfoglalma, a Prolog kifejezés (term)

- konstans (atomic)
 - számkonstans (number) – egész vagy lebegőp, pl. 1, -2.3, 3.0e10
 - névkonstans (atom), pl. 'István', szuloje, +, - tree_sum
 - egy *C* konstans **funktor** *C/0*
- összetett- vagy struktúra-kifejezés (compound)
 - ún. kanonikus alak: $\langle \text{struktúranév} \rangle (\langle \text{arg}_1 \rangle, \dots, \langle \text{arg}_n \rangle)$
 - a $\langle \text{struktúranév} \rangle$ egy névkonstans, az $\langle \text{arg}_i \rangle$ argumentumok tetszőleges Prolog kifejezések
 - a kifejezés **funktor**: $\langle \text{struktúranév} \rangle / n$
 - példák: `person(ian,smith,2003)`, `<(X,Y)`, `is(X, +(Y,1))`
 - szintaktikus „édesítőszerek”, pl. operátorok:

$$X \text{ is } Y+1 \equiv \text{is}(X, +(Y,1))$$
- változó (var)
 - pl. *X*, Szulo, X2, _valt, _, _123
 - a változó alaphelyzetben behelyettesíthető, értékkel nem bír, egyesítés során egy tetszőleges Prolog kifejezést (akár egy másik változót) vehet fel értékül – **dinamikus típusfogalom**

Adatstruktúrák Prologban – a bináris fák példája

- A bináris fa adatstruktúra
 - vagy egy csomópont (node), amelynek két részfája van (left, right)
 - vagy egy levél (leaf), amely egy egészt tartalmaz

Binárisfa-struktúra C-ben

```
enum treetype {Node, Leaf};
struct tree {
    enum treetype type;
    union {
        struct { struct tree *left;
                struct tree *right;
        } nd;
        struct { int value;
        } lf;
    };
};
```

A Prolog dinamikusan típusos nyelv – nincs szükség explicit típusdefinícióra

- Mercury típusleírás (komment)


```
% :- type tree --->
%     node(tree, tree)
%     | leaf(int).
```
- A típushoz tartozás ellenőrzése


```
% is_tree(T): T egy bináris fa
is_tree(leaf(V)) :- integer(V).
is_tree(node(Left,Right)) :-
    is_tree(Left),
    is_tree(Right).
```

Bináris fák összegzése

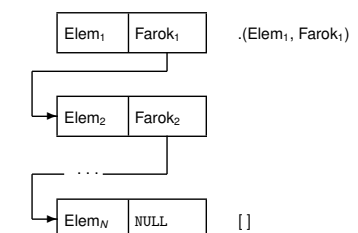
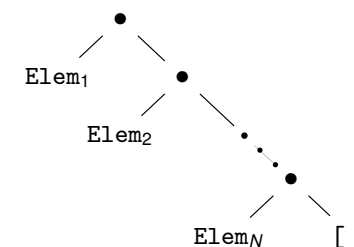
- Egy bináris fa levélösszegének kiszámítása:
 - levél esetén a levélben tárolt egész
 - csomópont esetén a két részfa levélösszegének összege

```
% S = tsum(T): T levélösszege S
int tsum(struct tree *tree)
{
    switch(tree->type) {
    case Leaf:
        return tree->u.lf.value;
    case Node:
        return tsum(tree->u.nd.left) +
            tsum(tree->u.nd.right);
    }
}
```

```
% tree_sum(Tree, S):  $\Sigma$  Tree = S.
tree_sum(leaf(Value), Value).
tree_sum(node(Left,Right), S) :-
    tree_sum(Left, S1),
    tree_sum(Right, S2),
    S is S1+S2.
| ?- tree_sum(node(leaf(5),
                node(leaf(3),
                    leaf(2))), S).
S = 10 ? ;
no
| ?- tree_sum(T, 3).
T = leaf(3) ? ;
! Inst. error in argument 2 of is/2
! goal: 3 is _73+_74
```

A Prolog lista-foglalma

- A Prolog lista
 - Az üres lista a [] névkonstans.
 - A nem-üres lista a ' .' (Fej, Farok) (SWI Prologban ' [] ' (Fej, Farok)) struktúra:
 - Fej a lista feje (első eleme), míg
 - Farok a lista farka, azaz a fennmaradó elemekből álló lista.
 - A listákat egyszerűsítve is leírhatjuk („szintaktikus édesítés”).
 - Megvalósításuk optimalizált, időben és helyben is hatékonyabb.
- A listák fastruktúra alakja és megvalósítása



Listák jelölése – szintaktikus „édesítőszerek”

- Az alapvető édesítés:
.(Fej, Farok) helyett a [Fej | Farok] kifejezést írjuk
- Kiterjesztés N darab „fej”-elemre, a skatulyázás kiküszöbölése:
[Elem₁ | ... | [Elem_N | Farok] ...] \implies [Elem₁, ..., Elem_N | Farok]
- Ha a farok [], a „| []” jelsorozat elhagyható:
[Elem₁, ..., Elem_N | []] \implies [Elem₁, ..., Elem_N]

| ?- [1,2] = [X|Y]. \implies X = 1, Y = [2] ?
 | ?- [1,2] = [X,Y]. \implies X = 1, Y = 2 ?
 | ?- [1,2,3] = [X|Y]. \implies X = 1, Y = [2,3] ?
 | ?- [1,2,3] = [X,Y]. \implies no
 | ?- [1,2,3,4] = [X,Y|Z]. \implies X = 1, Y = 2, Z = [3,4] ?
 | ?- L = [1|_], L = [_ ,2|_]. \implies L = [1,2|_A] ? % nyílt végű
 | ?- L = .(1, [2,3| []]). \implies L = [1,2,3] ?
 | ?- L = [1,2|. (3, [])]. \implies L = [1,2,3] ?

Listák összefűzése – az append/3 eljárás

- Egy funkcionális (Erlang) megoldás:

```
append([], B) -> B;
append([X|A], B) -> [X|append(A, B)].
```

- Írjuk át a kétargumentumú append *függvényt* app0/3 Prolog *eljárásá*!
% app0(A, B, C): A és B listák összefűzése a C lista.
app0([], B, Ret) :- Ret = B.
app0([X|A], B, Ret) :-
 app0(A, B, C), Ret = [X|C].
- Logikailag tiszta Prolog programokban a *vált* = *Kif* alakú hívások kiküszöbölhetőek, ha *vált* minden előfordulását *Kif*-re cseréljük.
app([], B, B).
app([X|A], B, [X|C]) :-
 app(A, B, C).
- Mindkét eljárásban a (max) futási idő arányos az 1. arg. hosszával
- Miért jobb az app/3 mint az app0/3?
 - app/3 **jobbrekurzív**, ciklussal ekvivalens (nem fogyaszt vermet)
 - app([1, ..., 1000], [0], [2, ...]) 1, app0(...) 1000 lépésben hiúsul meg.
 - app/3 használható szétszedésre is (lásd később), míg app0/3 nem.

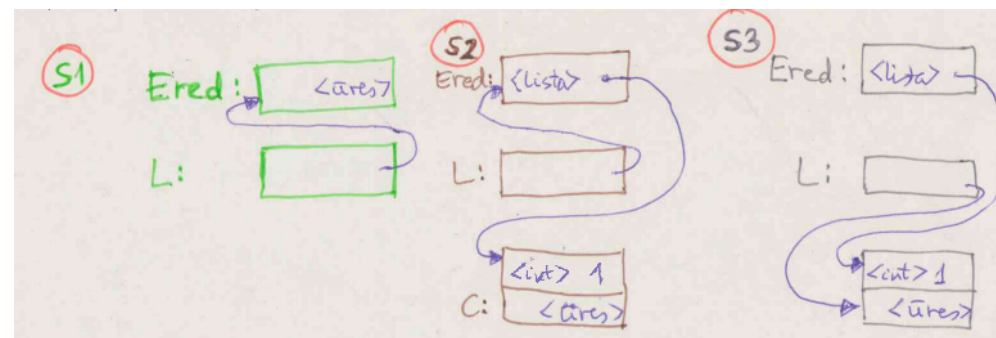
Lista építése *előlről* – nyílt végű listákkal

- Egy x Prolog kifejezés **nyílt végű lista**, ha x változó, vagy $x = [_ | Farok]$ ahol *Farok* nyílt végű lista.
| ?- L = [1|_], L = [_ ,2|_]. \implies L = [1,2|_A] ?
- A beépített append/3 azonos az app/3-mal:
append([], B, B).
append([X|A], B, [X|C]) :-
 append(A, B, C).
- Az append eljárás már az első redukciónál felépíti az eredmény fejét!
 - Példa-célsorozat: append([1,2,3], [4,5], Ered), answer(Ered).
 - Fej: append([X|A], B, [X|C])
 - Behelyettesítés: X = 1, A = [2,3], B = [4,5], Ered = [1|C]
 - Új célsorozat: append([2,3], [4,5], C), answer([1|C]).
(Ered nyílt végű lista, farka még behelyettesítetlen.)
 - A további redukciós lépések behelyettesítése és eredménye:
C = [2|C1] append([3], [4,5], C1), answer([1|[2|C1]]).
C1 = [3|C2] append([], [4,5], C2), answer([1,2|[3|C2]]).
C2 = [4,5] answer([1,2,3|[4,5]]).

Lista építése *előlről* – a megvalósítás részletei

```
app1([], B, B).
app1([X|A], B, L /*S1 (1. hívás), S3 (2., rekurzív hívás)*/ :-
    L = [X|C], /*S2*/
    app1(A, B, C).

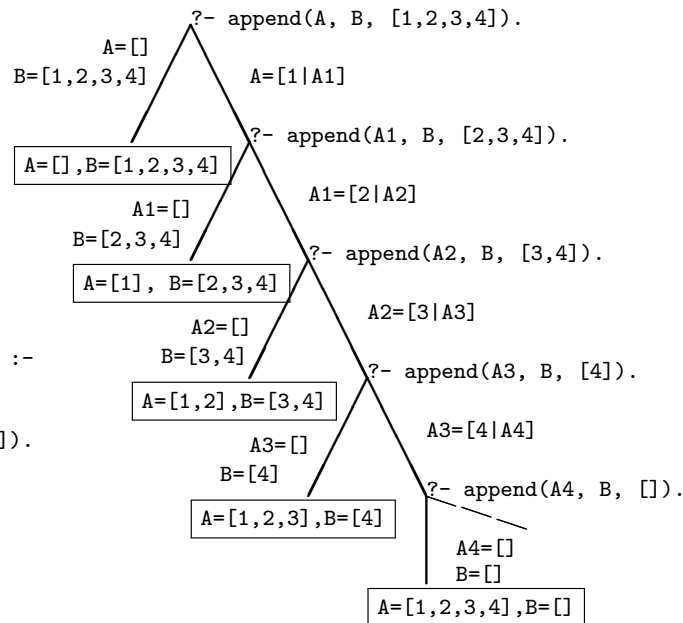
:- app1([1,2,3], [4,5], Ered).
```



Listák szétbontása az append/3 segítségével

```
% append(L1, L2, L3):
% Az L3 lista az L1 és L2
% listák elemeinek egymás
% után fűzésével áll elő.
append([], L, L).
append([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    append(L1, L2, L3).

| ?- append(A, B, [1,2,3,4]).
A = [], B = [1,2,3,4] ? ;
A = [1], B = [2,3,4] ? ;
A = [1,2], B = [3,4] ? ;
A = [1,2,3], B = [4] ? ;
A = [1,2,3,4], B = [] ? ;
no
```



Tartalom

- 1 Prolog alapok
 - Bevezető példa
 - Beépített eljárások
 - A Prolog adatfoglalma
 - A Prolog nyelv alapszintaxisa
 - Haladó Prolog: korutin-szervezés
 - Első példánk CLP rendszerre: CLP(MiniNat)
 - 1. kis házi feladat

Predikátumok, klózk

• Példa:

```
% két klózból álló predikátum definíciója, funktora: tree_sum/2
tree_sum(leaf(Val), Val).           %           1. klóz, tényáll.
tree_sum(node(Left,Right), S) :- % fej \
    tree_sum(Left, S1),           % cél \ |
    tree_sum(Right, S2),          % cél | törzs | 2. klóz, szabály
    S is S1+S2.                  % cél / |
```

• Szintaxis:

```
< Prolog program > ::= < predikátum > ...
< predikátum > ::= < klóz > ... {azonos funktorú}
< klóz > ::= < tényállítás > .⊥ |
           < szabály > .⊥ {klóz funktora = fej funktora}

< tényállítás > ::= < fej >
< szabály > ::= < fej > :- < törzs >
< törzs > ::= < cél >, ...
< cél > ::= < kifejezés >
< fej > ::= < kifejezés >
```

Prolog kifejezések

• Példa – egy klózfej mint kifejezés:

```
% tree_sum(node(Left,Right), S) % összetett kif., funktora
% ----- - tree_sum/2
% | | |
% struktúranév \ argumentum, változó
% \- argumentum, összetett kif.
```

• Szintaxis:

```
< kifejezés > ::= < változó > | {Nincs funktora}
               < konstans > | {Funktora: < konstans >/0}
               < összetett kif. > | {Funktora: < struktúranév >/< arg.sz. >}
               < egyéb kifejezés > | {Operátoros, lista, stb.}

< konstans > ::= < névkonstans > |
               < számkonstans >

< számkonstans > ::= < egész szám > |
                  < lebegőp. szám >

< összetett kif. > ::= < struktúranév > ( < argumentum >, ... )
< struktúranév > ::= < névkonstans >
< argumentum > ::= < kifejezés >
```

Lexikai elemek: példák és szintaxis

```
% változó:      Fakt FAKT _fakt X2 _2 _
% névkonstans: fakt ≡ 'fakt' 'István' [] ; ', ' += ** \= ≡ '\\='
% számkonstans: 0 -123 10.0 -12.1e8
% nem névkonstans: !=, Istvan
% nem számkonstans: 1e8 1.e2
```

```
< változó > ::= < nagybetű > < alfanum. jel > ... |
               _ < alfanum. jel > ...
< névkonstans > ::= ' < idézett kar. > ... ' |
                  < kisbetű > < alfanum. jel > ... |
                  < tapadó jel > ... | ! | ; | [] | {}
< egész szám > ::= {előjeles vagy előjeltelen számjegysorozat}
< lebegőp.szám > ::= {belsejében tizedespontot tartalmazó
                    számjegysorozat esetleges exponenssel}
< idézett kar. > ::= {tetszőleges nem ' és nem \ karakter} |
                    \ < escape szekvencia >
< alfanum. jel > ::= < kisbetű > | < nagybetű > | < számjegy > | _
< tapadó jel > ::= + | - | * | / | \ | $ | ^ | < | > | = | ` | ~ | : | . | ? | @ | # | &
```

Prolog programok formázása

- Megjegyzések (comment)
 - A % százalékjeltől a sor végéig
 - A /* jelpártól a legközelebbi */ jelpárig.
- Formázó elemek (komment, szóköz, újsor, tabulátor stb.) szabadon használhatók
 - kivétel: összetett kifejezésben a struktúranév után tilos formázó elemet tenni (operátorok miatt);
 - prefix operátor (ld. később) és „(” között kötelező a formázó elem;
 - klózt lezáró pont (.): önmagában álló pont (előtte nem tapadó jel áll) amit egy formázó elem követ
- Programok javasolt formázása:
 - Az egy predikátumhoz tartozó klózok legyenek egymás mellett a programban, közük ne tegyünk üres sort.
 - A predikátum elé tegyünk egy üres sort és egy fejkomentet:


```
% predikátumnév(A1, ..., An): A1, ..., An közötti
% összefüggést leíró kijelentő mondat.
```
 - A klózfejet írjuk sor elejére, minden célt lehetőleg külön sorba, néhány szóközzel beljebb kezdve

Tartalom

1 Prolog alapok

- Bevezető példa
- Beépített eljárások
- A Prolog adatfogalma
- A Prolog nyelv alapszintaxisa
- Haladó Prolog: korutin-szervezés
- Első példánk CLP rendszerre: CLP(MiniNat)
- 1. kis házi feladat

Blokkolás, korutinszervezés

- Blokk-deklarációk SICStusban
 - Egy eljárásra előírhatjuk, hogy mindaddig, amíg egy ún. blokkolási feltétel fennáll, az eljárás függesztődik fel.
 - Példa:


```
:- block p(-, ?, -, ?, ?).
```
 - Jelentése: ha az első és a harmadik argumentum is behelyettesítetlen változó (blokkolási feltétel), akkor a p/5 hívás felfüggesztődik.
 - Ugyanarra az eljárásra több vagylagos feltétel is szerepelhet, pl.


```
:- block p(-, ?), p(?, -).
```

 (p/2 felfüggesztődik, ha bármelyik argumentuma behelyettesítetlen.)
- Blokk-deklarációk haszna
 - Adatfolyam-programozás (lásd Hamming probléma, Prolog jegyzet)
 - Generál és ellenőriz programok gyorsítása
 - Végtelen választási pontok kiküszöbölése

Listák biztonságos összefűzése blokk-deklaráció segítségével

```
:- block app(-, ?, -).
% blokkol, ha az első és a harmadik argumentum
% egyaránt behelyettesíthető
app([], L, L).
app([X|L1], L2, [X|L3]) :-
    app(L1, L2, L3).
```

```
| ?- app(L1, L2, L3).
user:app(L1,L2,L3) ? ;
no
| ?- app(L1, L2, L3), L3 = [a|L4].
L1 = [], L2 = [a|L4], L3 = [a|L4] ? ;
L1 = [a|_A], L3 = [a|L4], user:app(_A,L2,L4) ? ;
no
```

Listák biztonságos összefűzése, nyomkövetés

```
| ?- trace, app(L1, L2, L3), L3 = [a|L4], L4 = [].
% The debugger will first creep -- showing everything (trace)
- - Block: app(_1012,_532,_1018)
1 1 Call: _1018=[a|_622] ?
- - Unblock: app(_1012,_532,[a|_622])
2 2 Call: app(_1012,_532,[a|_622]) ?
? 2 2 Exit: app([],[a|_622],[a|_622]) ?
? 1 1 Exit: [a|_622]=[a|_622] ?
3 1 Call: _622=[] ?
3 1 Exit: []=[] ?
L1 = [], L2 = [a], L3 = [a], L4 = [] ? ;
1 1 Redo: [a|_622]=[a|_622] ?
2 2 Redo: app([],[a|_622],[a|_622]) ?
- - Block: app(_2098,_532,_2104)
2 2 Exit: app([a|_2098],_532,[a|_2104]) ? &

Blocked goals:
1 (_2098): user:app(_2098,_532,_2104)
2 (_2104): user:app(_2098,_532,_2104)
2 2 Exit: app([a|_2098],_532,[a|_2104]) ?
1 1 Exit: [a|_2104]=[a|_2104] ?
4 1 Call: _2104=[] ?
- - Unblock: app(_2098,_532,[])
5 2 Call: app(_2098,_532,[]) ?
? 5 2 Exit: app([],[],[]) ?
? 4 1 Exit: []=[] ?
L1 = [a], L2 = [], L3 = [a], L4 = [] ? ;
4 1 Redo: []=[] ?
5 2 Redo: app([],[],[]) ?
5 2 Fail: app(_2098,_532,[]) ?
4 1 Fail: _2104=[] ?

no
```

Példa korutinszervezésre: többirányú összeadás

```
% plusz(X, Y, Z): X+Y=Z, ahol X, Y és Z természetes számok.
% Bármelyik argumentum lehet behelyettesíthető.
plusz(X, Y, Z) :-
    app(A, B, C), len(A, X), len(B, Y), len(C, Z).

% L hossza Len.
len(L, Len) :- len(L, 0, Len).

:- block len(-, ?, -).
% L lista hossza Len-Len0. Len0 mindig ismert.
len(L, Len0, Len) :-
    nonvar(Len), !, Len1 is Len-Len0, length(L, Len1).
len(_|_|L, Len0, Len) :-
    Len1 is Len0+1, len(L, Len1, Len).
len([], Len, Len).
```

Példa korutinszervezésre: többirányú összeadás

```
| ?- plusz(X, Y, 2).
X = 0, Y = 2 ? ;
X = 1, Y = 1 ? ;
X = 2, Y = 0 ? ;
no
| ?- plusz(X, X, 8).
X = 4 ? ;
no
| ?- plusz(X, 1, Y), plusz(X, Y, 22).
no
| ?- plusz(2, A, B).
user:len(_A,0,A), % van egy _A lista, melynek hossza A
user:len(_A,2,B) ? % és _A hossza B-2
% VAGYIS: A = B-2
;
no
```

Korutinszervezés – hívások késleltetése

- `freeze(X, Hivas)`
Hivást felfüggeszti mindaddig, amíg `X` behelyettesítetlen változó.
- `dif(X, Y)`
`X` és `Y` nem egyesíthető. Mindaddig felfüggesztődik, amíg ez el nem dönthető.
- `when(Feltétel, Hívás)`
Blokolja a Hívást mindaddig, amíg a Feltétel igazsá nem válik. Itt a Feltétel egy (nagyon) leegyszerűsített Prolog cél, amelynek szintaxisa:

```
CONDITION ::= nonvar(X) | ground(X) | ?=(X,Y) |
             CONDITION, CONDITION |
             CONDITION; CONDITION
```

`ground(X)` jelentése: `X` tömör – nincs benne (behelyettesítetlen) változó

`?=(X,Y)` jelentése: `X` és `Y` egyesíthetősége eldönthető

Korutinszervezés – hívások késleltetése

- Példa (process csak akkor hívódik meg, ha `T` tömör, és vagy `X` nem változó, vagy `X` és `Y` egyesíthetősége eldönthető):

```
| ?- when( ((ground(T),nonvar(X);?(X,Y))),
           process(X,Y,T)).
```

- A `dif` eljárás a `when` segítségével definiálható:

```
dif(X, Y) :- when(?=(X,Y), X\=Y).
```

Korutinszervezés – késleltetett hívások lekérdezése

- `frozen(X, Hivas)`
Az `X` változó miatt felfüggesztett hívás(oka)t egyesíti `Hivas`-sal.
- `call_residue_vars(Hivas, Valtozok)`
Hivas-t végrehajtja, és a `Valtozok` listában visszaadja mindazokat az új (a Hivas alatt létrejött) változókat, amelyekre vonatkoznak felfüggesztett hívások. Pl.

```
| ?- call_residue_vars((dif(X,f(Y)), X=f(Z)), Vars).
```

```
X = f(Z),
Vars = [Z,Y],
prolog:dif(f(Z),f(Y)) ?
```

Többszörös összeadás when segítségével

```
:- use_module(library(between)).
```

```
% app(L1, L2, L3): L1 és L2 összefűzöttje L3.
% ahol L1, L2 és L3 1-es számokból álló listák.
app([], L, L).
app([_|L1], L2, [_|L3]) :-
    when((nonvar(L1);nonvar(L3)),
         app(L1, L2, L3)).
```

```
len(L, Len) :-
    when(ground(L), length(L, Len)),
    when(nonvar(Len), findall(1, between(1, Len, _), L)).
```

```
% X+Y=Z, ahol X, Y és Z természetes számok.
% Bármelyik argumentum lehet behelyettesítetlen.
plusz(X, Y, Z) :-
    app(A, B, C),
    len(A, X),
    len(B, Y),
    len(C, Z).
```

Többirányú összeadás when segítségével

```

| ?- plusz(X, Y, 2).
X = 0, Y = 2 ? ;
X = 1, Y = 1 ? ;
X = 2, Y = 0 ? ;
no
| ?- plusz(X, X, 8).
X = 4 ? ;
no
| ?- plusz(X, 1, Y), plusz(X, Y, 20).
no
| ?- plusz(2, A, B).
prolog:trig_ground(_A, [], [_A], _B, _B),
prolog:when(_B,ground(_A),user:length(_A,A)),
prolog:when(A,nonvar(A),user:findall(1,between(1,A,_C),_A)),
prolog:trig_ground(_A, [], [_A], _D, _D),
prolog:when(_D,ground([1,1|_A]),user:length([1,1|_A],B)),
prolog:when(B,nonvar(B),user:findall(1,between(1,B,_E),[1,1|_A])) ?
no

```

Tartalom

- 1 Prolog alapok
 - Bevezető példa
 - Beépített eljárások
 - A Prolog adatfogalma
 - A Prolog nyelv alapszintaxisa
 - Haladó Prolog: korutin-szervezés
 - Első példánk CLP rendszerre: CLP(MiniNat)
 - 1. kis házi feladat

CLP(MiniNat) megvalósítása – számábrázolás

- A korábbi plusz/3 eljárásokban egy N elemű listával ábráztuk az N számot (a listaelemek érdektelenek, behelyettesíthetetlen változók vagy 1-esek)
- Példa: a 2 szám ábrázolása: $[_ , _] \equiv .(, .(, []))$.
- Hagyjuk el a felesleges listaelemeket, akkor a 2 szám ábrázolása: $.(.([]))$.
- Itt a $[]$ jelenti a 0 számot, a $.(X)$ struktúra az X szám rákövetkezőjét (a nála 1-gyel nagyobb számot).
- Ez tulajdonképpen a Peano féle számábrázolás, ha a $./1$ helyett az $s/1$ funktort, a $[]$ helyett a 0 konstans használjuk.
- A CLP(MiniNat) megvalósításában a Peano számábrázolást használjuk, tehát: $0 = 0$; $1 = s(0)$; $3 = s(s(s(0)))$ stb.

CLP(MiniNat) megvalósítása – összeadás és kivonás

```

% plusz(X, Y, Z): X+Y=Z (Peano számokkal).
:- block plusz(-, ?, -).
plusz(0, Y, Y).
plusz(s(X), Y, s(Z)) :-
    plusz(X, Y, Z).

% +(X, Y, Z): X+Y=Z (Peano számokkal). Hatékonyabb, mert
% továbblép, ha bármelyik argumentum behelyettesített.
:- block +(-, -, -).
+(X, Y, Z) :-
    nonvar(Y), !, plusz(Y, X, Z).
+(X, Y, Z) :-
    /* var(Y), */ plusz(X, Y, Z). % \+((var(X),var(Z)))

% X-Y=Z (Peano számokkal).
-(X, Y, Z) :-
    +(Y, Z, X).

```

CLP(MiniNat) – a szorzás művelet megvalósítási elvei

- Felfüggesztjük mindaddig, míg legalább egy tényező vagy a szorzat ismertté nem válik.
- Ha az egyik tényező ismert, visszavezetjük ismételt összeadásra.
- Ha a szorzat ismert (N), az egyik tényezőre végigpróbáljuk az $1, 2, \dots, N$ értékeket, ezáltal ismételt összeadásra visszavezethetővé tesszük.

CLP(MiniNat) megvalósítása – szorzás

```
% X*Y=Z. Blokkol, ha nincs tömör argumentuma.
*(X, Y, Z) :-
    when( (ground(X);ground(Y);ground(Z)),
          szor(X, Y, Z)).

% X*Y=Z, ahol legalább az egyik argumentum tömör.
szor(X, Y, Z) :-
    (   ground(X) -> szor(X, Y, Z)
    ;   ground(Y) -> szor(Y, X, Z)
    ;   /* Z tömör! */
        Z == 0 -> szorzatuk_nulla(X, Y)
    ;   X = s(_), +(X, _, Z),
        % X =< Z, vö. between(1, Z, X)
        szor(X, Y, Z)
    ).

% X*Y=0.
szorzatuk_nulla(X, Y) :-
    (   X = 0
    ;   dif(X, 0), Y = 0
    ).

% szor(X, Y, Z): X*Y=Z, X tömör.
% Y-nak az (ismert) X-szeres összeadása adja ki Z-t.
szor(0, _X, 0).
szor(s(X), Y, Z) :-
    szor(X, Y, Z1),
    +(Z1, Y, Z).
```

CLP(MiniNat) megvalósítása – a korlátok végrehajtása

- A funkcionális alakban megadott korlátokat a $+ /3$, $- /3$, $* /3$ hívásokból álló célsorozattá alakítjuk, majd ezt a célsorozatot meghívjuk.
- Például a $\{X*Y+2=Z\}$ korlát lefordított alakja:
 $*(X, Y, _A), +(_A, s(s(0)), Z)$,
- Az $\{X =< Y\}$ korlátot az $\{X+_ = Y\}$ korlátra, az $\{X < Y\}$ korlátot pedig az $\{X+s(_) = Y\}$ korlátra vezetjük vissza

```
% {Korlat}: Korlat fennáll.
{Korlat} :-
    korlat_cel(Korlat, Cel), call(Cel).
```

CLP(MiniNat) megvalósítása – korlátok fordítása

```
% korlat_cel(Korlat, Cel): Korlat végrehajtható
% alakja a Cel célsorozat.
korlat_cel(Kif1=Kif2, (C1,C2)) :-
    kiertekel(Kif1, E, C1), % Kif1 értékét E-ben
    % előállító cél C1
    kiertekel(Kif2, E, C2).
korlat_cel(Kif1 =< Kif2, Cel) :-
    korlat_cel(Kif1+_ = Kif2, Cel).
korlat_cel(Kif1 < Kif2, Cel) :-
    korlat_cel(Kif1+1 =< Kif2, Cel).
korlat_cel(Kif1 >= Kif2, Cel) :-
    korlat_cel(Kif2 =< Kif1, Cel).
korlat_cel(Kif1 > Kif2, Cel) :-
    korlat_cel(Kif2 < Kif1, Cel).
korlat_cel((K1,K2), (C1,C2)) :-
    korlat_cel(K1, C1), korlat_cel(K2, C2).
```

CLP(MiniNat) megvalósítása – kifejezések fordítása

```
% kiertekel(Kif, E, Cel): A Kif aritmetikai kifejezés
% értékét E-ben előállító cél Cel.
% Kif egészekből és változókból
% a +, -, és * operátorokkal épül fel.
```

- Egy Kif_1 Op Kif_2 kifejezés lefordított alakja egy három részből álló célsorozat, amely egy E változóban állítja elő a kifejezés eredményét:
 - első rész: Kif_1 értékét pl. E_1 -ben előállító cél(sorozat).
 - második rész: Kif_2 értékét pl. E_2 -ben előállító cél(sorozat).
 - harmadik rész: az $Op(E_1, E_2, E)$ hívás (ahol Op a +, -, * jelek egyike).
- Egy szám lefordított formája az ő Peano alakja.
- Minden egyéb (változó, vagy már Peano alakú szám) változatlan marad a fordításkor.

CLP(MiniNat) megvalósítása – kifejezések fordítása

```
% kiertekel(Kif, E, Cel): A Kif aritmetikai kifejezés
% értékét E-ben előállító cél Cel.
% Kif egészekből a +, -, és * operátorokkal épül fel.
kiertekel(Kif, E, Cel) :-
    ( compound(Kif), Kif =.. [Op,Kif1,Kif2]
    -> Cel = (C1,C2,Rel),
      Rel =.. [Op,E1,E2,E],
      kiertekel(Kif1, E1, C1),
      kiertekel(Kif2, E2, C2)
    ; integer(Kif)
    -> Cel = true, int_to_peano(Kif, E)
    ; Cel = true, E = Kif
    ).

% int_to_peano(N, P): N természetes szám Peano alakja P.
int_to_peano(N, P) :-
    ( N > 0 -> N1 is N-1, P = s(P1),
      int_to_peano(N1, P1)
    ; N = 0, P = 0
    ).
```

Prolog háttér: kifejezések testreszabott kiírása

- `print/1`
Alapértelmezésben azonos `write`-tal. Ha a felhasználó definiál egy `portray/1` eljárást, akkor a rendszer minden a `print`-tel kinyomtatandó részkifejezésre meghívja `portray`-t. Ennek sikere esetén feltételezi, hogy a kiírás megtörtént, meghíúsulás esetén maga írja ki a részkifejezést. A rendszer a `print` eljárást használja a változó-behelyettesítések és a nyomkövetés kiírására is!
- `portray/1`
Igaz, ha Kif kifejezést a Prolog rendszernek nem kell kiírnia. Mellékhatásként a kívánt formában kiírja a Kif kifejezést. Ez egy felhasználó által definiálendő (*kampó*) eljárás (callback/hook predicate).

Prolog háttér: kifejezések testreszabott kiírása

Példa: mátrixok kiírása

```
portray(Matrix) :-
    Matrix = [[_]|_],
    % Durva közelítés: mátrixnak tekintünk egy kif.-t ha
    % olyan lista, melynek első eleme nem-üres lista
    ( member(Row, Matrix), nl, print(Row), fail
    ; true
    ).

| ?- X = [[1,2,3],[4,5,6]].
X =
[1,2,3]
[4,5,6] ?
```

Példa testreszabott kiíratásra: Peano számok

```
% Peano számok kiírásának formázása
user:portray(Peano) :-
    peano_to_int(Peano, 0, N), write(N).

% A Peano Peano-szám értéke N-NO.
peano_to_int(Peano, NO, N) :- nonvar(Peano),
    ( Peano == 0 -> N = NO
    ; Peano = s(P),
      N1 is NO+1,
      peano_to_int(P, N1, N)
    ).

% Célok kiírásának formázása
user:portray(mininat:Rel) :-
    Rel =.. [Pred,A,B,C],
    predikatum_operator(Pred, Op),
    Fun =.. [Op,A,B],
    print({Fun=C}).

predikatum_operator(plusz, +).
predikatum_operator(+, +).
predikatum_operator(-, -).
predikatum_operator(*, *).
```

CLP(MiniNat) használata — példák

```
:- block fact0(-,-). % csak akkor fut ha ismert N vagy F.
fact0(N, F) :-
    {N = 0, F = 1}.
fact0(N, F) :-
    {N1 = N-1},
    fact0(N1, F1),
    {F = N*F1}.

| ?- {X*X+Y*Y=25, X>Y}.
X = 4, Y = 3 ? ;
X = 5, Y = 0 ? ; no

| ?- fact0(6, F).
F = 720 ? ; no

| ?- fact0(8, F).
F = 40320 ? ; no

| ?- fact0(N, 6).
N = 3 ? ; no

| ?- fact0(N, 24).
N = 4 ? ;
! Resource error: insufficient memory

| ?- fact0(N, 11).
no

| ?- fact0(N, 17).
! Resource error: insufficient memory
```

Az erőforrás probléma nyomkövetése

```
:- block fact00(-,-).
fact00(N, F) :-
    {N = 0, F = 1}.
fact00(N, F) :-
    {N1 = N-1}, fact0(N1, F1),
    {F = N_*F1}, % F-et két tényezőre bontjuk
    N_=N, F1_=F1. % A két tényezőt behelyettesítjük N-be és F1-be
```

- A `fact00(N, 17)` hívás a második klózzal illesztve a `{17=N_*F1_}` feltételre vezetődik vissza. Ez két megoldást generál: `N_=1, F1_=17`, ill. `N_=17, F1_=1`. Ezekre a behelyettesítésekre felébred a `fact0` hívás a `fact0(0,17)` majd a `fact0(16,1)` paraméterekkel.

```
| ?- trace, fact00(N, 17).
1      1 Call: fact00(_785,17) ?          5      2 Redo: {17=1*17} ? s
2      2 Call: {_785=0,17=1} ? s         5      2 Exit: {17=1*17} ?
2      2 Fail: {_785=0,17=1} ?           -      - Unblock: fact0(16,1)
4      2 Call: {_2453=785-1} ? s         7      2 Call: fact0(16,1) ?
4      2 Exit: {_2453=s(_2453)-1} ?     8      3 Call: {16=0,1=1} ? s
-      - Block: fact0(_3863,_3875)      8      3 Fail: {16=0,1=1} ?
5      2 Call: {17=_4061*_4063} ? s     9      3 Call: {_6493=16-1} ? s
5      2 Exit: {17=1*17} ?             9      3 Exit: {15=16-1} ?
-      - Unblock: fact0(0,17)          10     3 Call: fact0(15,7867) ? s
6      2 Call: fact0(0,17) ? s          ! Resource error: insufficient memory
6      2 Fail: fact0(0,17) ?
```

- A második klóz ez utóbbit mohón értékeli ki: kiszámolja $15! - 1$ – memóriatúllépés :-)

Az erőforrás probléma egy megoldása

- A szorzat-feltételt tegyük a rekurzív `fact` hívás elé.

```
:- block fact1(-,-).
fact1(N, F) :- {N = 0, F = 1}.
fact1(N, F) :-
    {N1 = N-1},
    {F = N*F1},
    fact1(N1, F1).

| ?- fact1(N, 24). -----> N = 4 ? ; no
```

- Egy további gyorsítási lehetőség egy *redundáns* korlát felvétele:

```
:- block fact2(-,-).
fact2(N, F) :- {N = 0, F = 1}.
fact2(N, F) :-
    {N1 = N-1},
    {F1 >= N1}, % redundáns
    {F = N*F1},
    fact2(N1, F1).
```

- Azonban az alábbi cél futása még így is kivárthatatlan ...

```
| ?- fact2(N, 5040). -----> N = 7 ? ;
```


Az erőforrás probléma – megjegyzések

- Egy korlát-programban minél később célszerű választási pontot csinálni.
- Ideálisan csak az összes korlát felvétele után kezdjük meg a keresést.
- Megoldás: egy külön keresési fázis (az ún. címkézés, labeling):

```
program :-
    korlátok_felvétele(...), labeling([V1, ..., VN]).
```
- CLP(MiniNat)-ban az eddig ismertetett eszközökkel ez nehezen megoldható, de
- CLP(MiniB) esetén (lásd 1. kis házi feladat) könnyen készíthető ilyen labeling/1 eljárás.

Prolog háttér: programok előfeldolgozása

Kampó (Hook, callback) eljárások a fordítási idejű átalakításhoz:

- `user:term_expansion(+Kif, ..., -Klózok, ...)`: (közelítő leírás): Minden betöltő eljárás (`consult`, `compile` stb.) által beolvasott kifejezésre a rendszer meghívja. A kimenő paraméterben várja a transzformált alakot (lehet lista is). Meghiúsulás esetén változtatás nélkül veszi fel a kifejezést klózként.
- `M:goal_expansion(+Cél, +Layout, +Modul, -ÚjCél, -ÚjLayout)`: Minden a beolvasott programban (vagy feltett kérdésben) előforduló részcélra meghívja a rendszer. A kimenő paraméterekben várja a transzformált alakot (lehet konjunkció). Meghiúsulás esetén változtatás nélkül hagyja a célt. (Ha a forrásszintű nyomkövetés nem fontos, `ÚjLayout` lehet []).

CLP(MiniNat) továbbfejlesztése `goal_expansion` használatával

- A funkcionális alak átalakítása a betöltés alatt is elvégezhető (kompilálás):

```
goal_expansion({Korlat}, _L0, _Module, Cel, /*ÚjL0*/ []) :-
    korlat_cel(Korlat, Cel).
```
- Célszerű a generált célsorozatból a `true` hívásokat kihagyni.

```
% összetett(C1, C2, C): C a C1 és C2 célok konjunkciója.
összetett(true, Cel0, Cel) :- !, Cel = Cel0.
összetett(Cel0, true, Cel) :- !, Cel = Cel0.
összetett(Cel1, Cel2, (Cel1,Cel2)).
```
- A fenti eljárást használjuk a konjunkciók helyett, pl:

```
korlat_cel((K1,K2), C12) :-
    korlat_cel(K1, C1), korlat_cel(K2, C2),
    összetett(C1, C2, C12).
```

Megjegyzés: a faktoriális példában ez a kompilálás 6-7% gyorsulást jelent

Előfeldolgozás a faktoriális példa esetén

- A faktoriális példa betöltött alakja :

```
fact(0, s(0)).
fact(N, F) :-
    +(s(0), _, N), % N >= 1
    -(N, s(0), N1), % N1 = N-1
    *(N, F1, F), % F = N*F1
    fact(N1, F1).
```
- Vigyázat! Az így előálló kód már nem foglalkozik a számok Peano-alakra hozásával:

```
| ?- fact(N, 6). --> no
| ?- {F=6}, fact(N, F). --> F = 6, N = 3 ? ; no
```



Prolog alapok

- Bevezető példa
- Beépített eljárások
- A Prolog adatfogalma
- A Prolog nyelv alapszintaxisa
- Haladó Prolog: korutin-szervezés
- Első példánk CLP rendszerre: CLP(MiniNat)
- 1. kis házi feladat

CLP(MiniB) jellemzése

- **Tartomány:** logikai értékek (1 és 0, igaz és hamis)
- **Függvények** (egyben korlát-relációk):
 - $\sim P$ P hamis (*negáció*).
 - $P * Q$ P és Q mindegyike igaz (*konjunkció*).
 - $P + Q$ P és Q legalább egyike igaz (*diszjunkció*).
 - $P \# Q$ P és Q pontosan egyike igaz (*kizáró vagy*).
 - $P =\backslash= Q$ Ugyanaz mint $P \# Q$.
 - $P =:= Q$ Ugyanaz mint $\sim(P \# Q)$.
- A fenti függvényjelek többsége szabványos beépített operátor (ezek prioritását nem célszerű módosítani), a \sim és $\#$ operátorokat – a CLP(B) könyvtárral megegyezően – az alábbi módon javasoljuk deklarálni:


```
:- op(300, fy, ~).
:- op(500, yfx, #).
```

A megvalósítandó eljárások

- `sat(Kif)`, ahol *Kif* változókból, a 0, 1 konstansokból a fenti műveletekkel felépített logikai kifejezés. Jelentése: A *Kif* logikai kifejezés igaz. A `sat/1` eljárás ne hozzon létre választási pontot! A benne szereplő változók behelyettesítése esetén minél előbb ébredjen fel, és végezze el a megfelelő következtetéseket (lásd a példákat alább)!
- `count(Es, N)`, ahol *Es* egy (változó-)lista, *N* adott természetes szám. Jelentése: Az *Es* listában pontosan *N* olyan elem van, amelynek értéke 1.
- `labeling(Változók)`. Behelyettesíti a *Változókat* 0, 1 értékekre. Visszalépés esetén felsorolja az összes lehetséges értéket.

Futási példák

```
| ?- sat(A*B =:= (~A)+B).
      ---> <...felfüggesztett célok...> ? ; no
| ?- sat(A*B =:= (~A)+B), labeling([A,B]).
      ---> A = 1, B = 0 ? ; A = 1, B = 1 ? ; no
| ?- sat((A+B)*C=\A*C+B), sat(A*B).
      ---> A = 1, B = 1, C = 0 ? ; no
| ?- count([A,A,B], 2). ---> <...felfüggesztett célok...> ? ; no
| ?- count([A,A,B], 2), labeling([A]).
      ---> A = 1, B = 0 ? ; no
| ?- count([A,A,B,B], 3), labeling([A,B]).
      ---> no
| ?- sat(~A =:= A). ---> no
```

1. kis házi feladat: egy kis segítség

```
:- op(100, fx, ~).
```

```
~(A, B) :-
    when( (nonvar(A); nonvar(B); ?=(A,B)),
          not(A,B)
        ).
```

```
not(A, NA) :-
    ( nonvar(A) -> NA is 1-A
    ; nonvar(NA) -> A is 1-NA
    ; A == NA -> fail
    ).
```

1. kis házi feladat: egy kis segítség

```
| ?- trace, ~(A, A).
1 1 Call: ~(A,A) ?
2 2 Call: when((nonvar(A);nonvar(A);?=(A,A)),not(A,A))?
3 3 Call: not(A,A) ?
4 4 Call: nonvar(A) ?
4 4 Fail: nonvar(A) ?
5 4 Call: nonvar(A) ?
5 4 Fail: nonvar(A) ?
6 4 Call: A==A ?
6 4 Exit: A==A ?
3 3 Fail: not(A,A) ?
2 2 Fail: when((nonvar(A);nonvar(A);?=(A,A)),not(A,A))?
1 1 Fail: ~(A,A) ?
no
| ?- sat(A*A:=B).
                                     B = A ? ; no
| ?- sat(A#A:=B).
                                     B = 0 ? ; no
| ?- sat(A+B:=C), A=B.
                                     B = A, C = A ? ; no
```

II. rész

A SICStus clp(Q,R) könyvtárai

- 1 Prolog alapok
- 2 A SICStus clp(Q,R) könyvtárai
- 3 A SICStus clp(B) könyvtára
- 4 A CLP elméleti háttere
- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
- 6 CHR – Constraint Handling Rules
- 7 A Mercury LP megvalósítás

A clpq/clpr könyvtárak

- Tartomány:
 - clpr: lebegőpontos számok
 - clpq: racionális számok
- Függvények:
 - + - * / min max pow exp (kétargumentumúak, pow \equiv exp),
 - + - abs sin cos tan (egyargumentumúak).
- Korlát-relációk:
 - = := < > =< >= =\= (= \equiv :=)
- Primitív korlátok (korlát tár elemei):
 - lineáris kifejezéseket tartalmazó relációk
- Korlát-megoldó algoritmus:
 - lineáris programozási módszerek: Gauss elimináció, szimplex módszer

A clpq/clpr könyvtárak

A könyvtár betöltése:

- `use_module(library(clpq))`, vagy
- `use_module(library(clpr))`

A fő beépített eljárás:

- `{ Korlát }`, ahol *Korlát* változókból és (egész vagy lebegőpontos) számokból a fenti műveletekkel felépített reláció, vagy ilyen relációknak a vessző (,) operátorral képzett konjunkciója.

A korlát-tár

- A CLP(X) séma általános adatstruktúrája
- A futás adott pillanatáig beérkezett ún. primitív korlátokat tárolja
- Ha a tárbeli korlátok ellentmondásosak, visszalépés történik (azaz előremenő végrehajtás esetén garantált a tár konzisztenciája)
- Az ún. összetett korlátok nem kerülnek be a tárba

Példafutás a SICStus clpq könyvtárával

```
| ?- use_module(library(clpq)).
{loading ../library/clpq.ql...}
...

| ?- {X=Y+4, Y=Z-1, Z=2*X-9}.
X = 6, Y = 2, Z = 3 ?    % lineáris egyenlet

| ?- {X+Y+9<4*Z, 2*X=Y+2, 2*X+4*Z=36}.
                                % lineáris egyenlőtlenség
{X<29/5}, {Y= -2+2*X}, {Z=9-1/2*X} ?
                                % az eredmény: ekvivalens alak,
                                % de látható, hogy ellentmondásmentes

| ?- {(Y+X)*(X+Y)/X = Y*Y/X+100}.
{X=100-2*Y} ?                % lineárisá egyszerűsíthető

| ?- {(Y+X)*(X+Y) = Y*Y+100*X}.
                                % így már nem lineáris
clpq:{2*(X*Y)-100*X+X^2=0} ?
                                % a clpq modul-prefix jelzi,
                                % hogy felfüggesztett összetett
                                % hívásról van szó
```

Példafutás a SICStus clpq könyvtárával

```
| ?- {exp(X+Y+1,2) = 3*X*X+Y*Y}.
                                % nem lineáris...
clpq:{1+2*X+2*(Y*X)-2*X^2+2*Y=0} ?

| ?- {exp(X+Y+1,2) = 3*X*X+Y*Y}, X=Y.
X = -1/4, Y = -1/4 ?    % így már igen...

| ?- {2 = exp(8, X)}.    % nem-lineárisak is
                                % megoldhatók

X = 1/3 ?
```

Összetett korlátok kezelése CLP(Q)-ban

Példa várakozó ágensre

```
| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z},
      ( Z = X*(Y-X), {Y < 0}
      ; Y = X
      ).
                                Y = X, {X-Z>0} ? ; no
```

A végrehajtás lépései

```
| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z}.
                                {X-Y=<0}, clpq:{Z-X-Y*X+X^2<0} ?

| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z}, Z = X*(Y-X).
                                Z = X*(Y-X), {X-Y=<0}, {X>0} ?

| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z}, Z = X*(Y-X), {Y < 0}.
                                no

| ?- {X =< Y}, {X*(Y+1) > X*X+Z}, Y = X.
                                Y = X, {X-Z>0} ?
```

Példa egy *lehetséges* erősítési lépésre

- A tár tartalma: $X > 3$.
- A végrehajtandó összetett korlát: $Y > X*X$.
- A korlátot a CLP megoldó nem tudja felvenni a tárba, de egy *következményét*, pl. az $Y > 9$ korlátot felvehetné!
- Az erősítés után az eredeti összetett korlát továbbra is démonként kell lebegjen!
- **Fontos megjegyzés:** a CLP(Q/R) rendszer **nem** hajtja végre a fenti következtetést, és semmiféle erősítést nem végez.

Egy összetettebb példa: hiteltörlesztés

```
% Hiteltörlesztés számítása: P összegű hitelt
% Time hónapon át évi IntRate kamat mellett havi MP
% részletekben törlesztve Bal a maradványösszeg.
mortgage(P, Time, IntRate, Bal, MP):-
    {Time > 0, Time = < 1,
     Bal = P*(1+Time*IntRate/1200)-Time*MP}.
mortgage(P, Time, IntRate, Bal, MP):-
    {Time > 1},
    mortgage(P*(1+IntRate/1200)-MP,
             Time-1, IntRate, Bal, MP).

| ?- mortgage(100000,180,12,0,MP).
           % 100000 Ft hitelt 180
           % hónap alatt törleszt 12%-os
           % kamatra, mi a havi részlet?
MP = 1200.1681 ?
```

Egy összetettebb példa: hiteltörlesztés

```
| ?- mortgage(P,180,12,0,1200).
           % ugyanez visszafelé
P = 99985.9968 ?

| ?- mortgage(100000,Time,12,0,1300).
           % 1300 Ft a törlesztőrészlet,
           % mi a törlesztési idő?
Time = 147.3645 ?

| ?- mortgage(P,180,12,Bal,MP).

{MP=0.0120*P-0.0020*Bal} ?

| ?- mortgage(P,180,12,Bal,MP), ordering([P,Bal,MP]).

{P=0.1668*Bal+83.3217*MP} ?
```

További könyvtári eljárások

- `entailed(Korlát)` — Korlát levezethető a jelenlegi tárból.
- `inf(Kif, Inf)` ill. `sup(Kif, Sup)` — kiszámolja `Kif` infimumát ill. szuprimumát, és egyesíti `Inf`-fel ill. `Sup`-pal. Példa:


```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11, X+3*Y =< 15,
        Z = 30*X+50*Y
      }, sup(Z, Sup).

Sup = 310, {...}
```
- `minimize(Kif)` ill. `maximize(Kif)` — kiszámolja `Kif` infimumát ill. szuprimumát, és egyenlővé teszi `Kif`-fel. Példa:


```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11, X+3*Y =< 15,
        Z = 30*X+50*Y
      }, maximize(Z).

X = 7, Y = 2, Z = 310
```

További könyvtári eljárások

- `bb_inf(Egészek, Kif, Inf)` — kiszámolja `Kif` infimumát, azzal a további feltétellel, hogy az `Egészek` listában levő minden változó egész (ún. „Mixed Integer Optimisation Problem”).

```
| ?- {X >= 0.5, Y >= 0.5}, inf(X+Y, I).
```

```
I = 1, {Y>=1/2}, {X>=1/2} ?
```

```
| ?- {X >= 0.5, Y >= 0.5}, bb_inf([X,Y], X+Y, I).
```

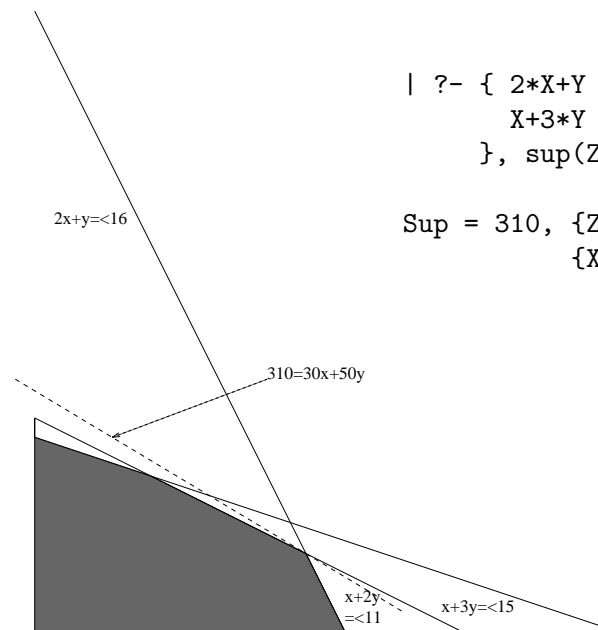
```
I = 2, {X>=1/2}, {Y>=1/2} ?
```

- `ordering(V1 < V2)` — A `V1` változó előbb szerepeljen az eredmény-korlátban mint a `V2` változó.
- `ordering([V1,V2,...])` — `V1`, `V2`, ... ebben a sorrendben szerepeljen az eredmény-korlátban.

További eljárások (lásd kézikönyv):

```
bb_inf/5, dump/3, projecting_assert/1,
```

Szélsőérték-számítás grafikus illusztrálása



```
| ?- { 2*X+Y =< 16, X+2*Y =< 11,
      X+3*Y =< 15, Z = 30*X+50*Y
      }, sup(Z, Sup).
```

```
Sup = 310, {Z=30*X+50*Y}, {X+1/2*Y=<8},
{X+3*Y=<15}, {X+2*Y=<11}
```

További részletek

Projekció

```
% Az (X,Y) pont az (1,2) (1,4) (2,4) pontok
% által kifeszített háromszögben van.
```

```
hszogben(X, Y) :-
```

```
{ X=1*L1+1*L2+2*L3,
  Y=2*L1+4*L2+4*L3,
  L1+L2+L3=1, L1>=0, L2>=0, L3>=0 }.
```

```
| ?- hszoqben(X, Y).
```

```
{Y=<4}, {X>=1}, {X-1/2*Y=<0} ?
```

```
| ?- hszoqben(_, Y).
```

```
{Y=<4}, {Y>=2} ?
```

```
| ?- hszoqben(X, _).
```

```
{X>=1}, {X=<2} ?
```

További részletek

Belső ábrázolás

```
clpr — lebegőpontos szám; clpq — rat (Számológó, Nevező), ahol Számológó
és Nevező relatív prímek. Például clpq-ban:
```

```
| ?- {X=0.5}, X=0.5.
```

```
no
```

```
| ?- {X=0.5}, X=1/2.
```

```
no
```

```
| ?- {X=0.5}, X=rat(2,4).
```

```
no
```

```
| ?- {X=0.5}, X=rat(1,2).
```

```
X = 1/2 ?
```

```
% portray jelenti meg
```

```
| ?- {X=5}, X=5.
```

```
no
```

```
| ?- {X=5}, X=rat(5,1).
```

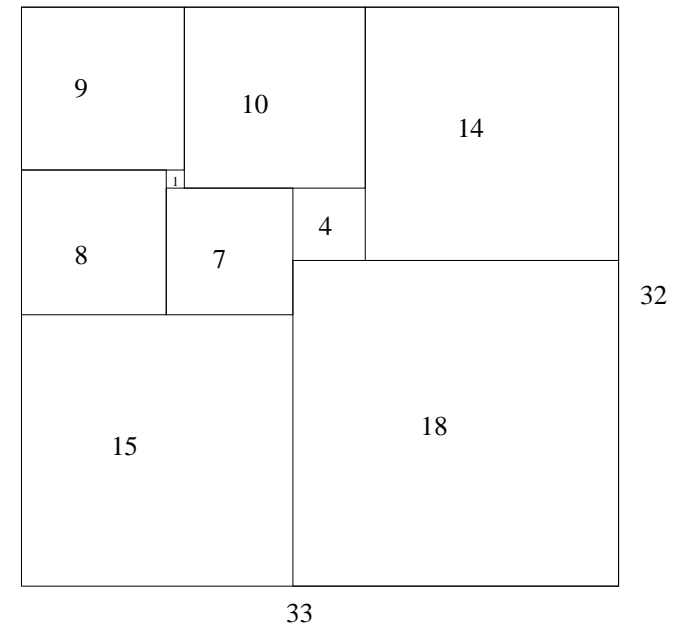
```
X = 5 ?
```

Egy nagyobb CLP(Q) feladat: Tökéletes téglalapok

Egy megoldás (a legkevesebb, 9 darab négyzet felhasználásával)

A feladat

- egy olyan téglalap keresése
- amely kirakható páronként különböző oldalú négyzetekből



Tökéletes téglalapok — CLP(Q) megoldás

```
% Colmerauer A.: An Introduction to Prolog III,
% Communications of the ACM, 33(7), 69-90, 1990.
```

```
% Rectangle 1 x Width is covered by distinct
% squares with sizes Ss.
filled_rectangle(Width, Ss) :-
    { Width >= 1 }, distinct_squares(Ss),
    filled_hole([-1,Width,1], _, Ss, []).
```

```
% distinct_squares(Ss): All elements of Ss are distinct.
distinct_squares([]).
distinct_squares([S|Ss]) :-
    { S > 0 }, outof(Ss, S), distinct_squares(Ss).
```

```
outof([], _).
outof([S|Ss], S0) :- { S =\= S0 }, outof(Ss, S0).
```

Tökéletes téglalapok — CLP(Q) megoldás

```
% filled_hole(L0, L, Ss0, Ss): Hole in line L0
% filled with squares Ss0-Ss (diff list) gives line L.
% Def: h(L): sum of lengths of vertical segments in L.
% Pre: All elements of L0 except the first >= 0.
% Post: All elems in L >=0, h(L0) = h(L).
filled_hole(L, L, Ss, Ss) :-
    L = [V|_], {V >= 0}.
filled_hole([V|HL], L, [S|Ss0], Ss) :-
    { V < 0 }, placed_square(S, HL, L1),
    filled_hole(L1, L2, Ss0, Ss1), { V1=V+S },
    filled_hole([V1,S|L2], L, Ss1, Ss).

% placed_square(S, HL, L): placing a square size S on
% horizontal line HL gives (vertical) line L.
% Pre: all elems in HL >=0
% Post: all in L except first >=0, h(L) = h(HL)-S.
placed_square(S, [H,V,H1|L], L1) :-
    { S > H, V=0, H2=H+H1 }, placed_square(S, [H2|L], L1).
placed_square(S, [S,V|L], [X|L]) :- { X=V-S }.
placed_square(S, [H|L], [X,Y|L]) :-
    { S < H, X= -S, Y=H-S }.
```

Tökéletes téglalapok: példafuttatás

```
% pentium i5, bogomips: 5187.85
| ?- length(Ss, N), N > 1, statistics(runtime, _),
    filled_rectangle(Width, Ss),
    statistics(runtime, [_], MSec).

N = 9, MSec = 840, Width = 33/32,
Ss = [15/32,9/16,1/4,7/32,1/8,7/16,1/32,5/16,9/32] ? ;

N = 9, MSec = 110, Width = 69/61,
Ss = [33/61,36/61,28/61,5/61,2/61,9/61,25/61,7/61,16/61] ? ;

N = 9, MSec = 1130, Width = 33/32,
Ss = [9/16,15/32,7/32,1/4,7/16,1/8,5/16,1/32,9/32] ?
```

Az outof hívás kihagyásával végzett futtatás

Kommentként közöljük a generált korlátokat, a redundánsak elhagyásával.

```
| ?- filled_rectangle(W, [S1,S2,S3], [eqsq]).

S1 = 1/2, S2 = 1, S3 = 1/2, W = 3/2 ? ;      % 3 3 2 2 2 2
                                              % 3 3 2 2 2 2
% {W=S1+S2}, {S2=<1}, {S1=S3},             % 1 1 2 2 2 2
% {S2>=S1+S3}, {S1+S3>=1}.                 % 1 1 2 2 2 2

S1 = 1, S2 = 1/2, S3 = 1/2, W = 3/2 ? ;    % 1 1 1 1 3 3
                                              % 1 1 1 1 3 3
% {W=S1+S2}, {S2=S3}, {S2+S3=<1},          % 1 1 1 1 2 2
% {S2+S3>=S1}, {S1>=1}.                   % 1 1 1 1 2 2

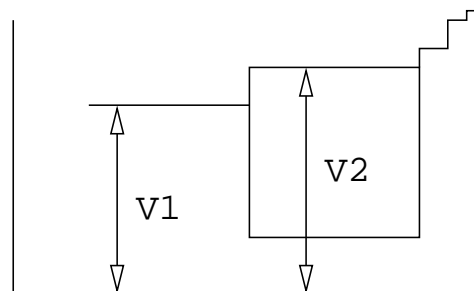
S1 = 1, S2 = 1, S3 = 1, W = 3 ? ; no
% {W=S1+S2+S3}, {S3=<1}, {S3>=S2},         % 1 1 2 2 3 3
% {S2>=S1}, {S1>=1}.                       % 1 1 2 2 3 3

| ?- test_rectangle(3, [eqsq], _C1), portray_clause(_C1), fail.
filled_rectangle1(Width, [S1,S2,S3]) :-
    {S1>0}, {S2>0}, {S3>0}, {Width>=1}, {S1<Width}, {S1>0}, {Width=S1+S2},
    {S2=<1}, {S2>=S1}, {S1<1}, {S1=S3}, {S2>=S1+S3}, {S1+S3>=1}.
...

```

Tökéletes téglalapok: választási pontok

Függőleges

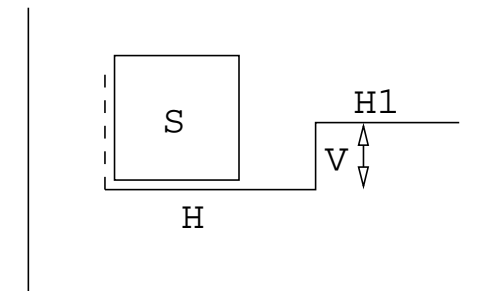


Függ.vál.

 $V1 = < V2$ $V1 > V2$

Tökéletes téglalapok: választási pontok

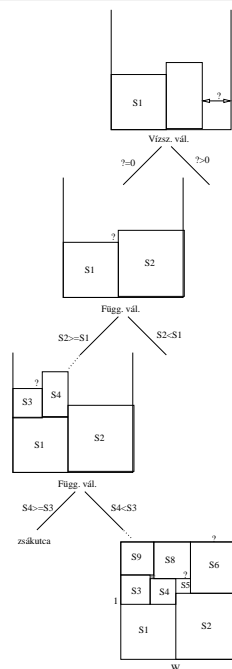
Vízszintes



Vízsz. vál.

 $V = 0,$
 $S > H$ $S < H$ $S = H$

Tökéletes téglalapok: a keresési tér szerkezete



A clpb könyvtár

- **Tartomány:** logikai értékek (1 és 0, igaz és hamis)
- **Függvények** (egyben korlát-relációk):
 - $\sim P$ P hamis (*negáció*).
 - $P * Q$ P és Q mindegyike igaz (*konjunkció*).
 - $P + Q$ P és Q legalább egyike igaz (*diszjunkció*).
 - $P \# Q$ P és Q pontosan egyike igaz (*kizáró vagy*).
 - $X \sim P$ Létezik olyan X, hogy P igaz (azaz $P[X/0] + P[X/1]$ igaz).
 - $P =\backslash= Q$ Ugyanaz mint $P \# Q$.
 - $P =:= Q$ Ugyanaz mint $\sim(P \# Q)$.
 - $P =< Q$ Ugyanaz mint $\sim P + Q$.
 - $P >= Q$ Ugyanaz mint $P + \sim Q$.
 - $P < Q$ Ugyanaz mint $\sim P * Q$.
 - $P > Q$ Ugyanaz mint $P * \sim Q$.
 - $\text{card}(Is, Es)$ Az Es listában szereplő igaz értékű kifejezések száma eleme az Is által jelölt halmaznak (Is egészek és To1-Ig szakaszok listája).

III. rész

A SICStus clp(B) könyvtára

- 1 Prolog alapok
- 2 A SICStus clp(Q,R) könyvtárai
- 3 A SICStus clp(B) könyvtára
- 4 A CLP elméleti háttere
- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
- 6 CHR – Constraint Handling Rules
- 7 A Mercury LP megvalósítás

A clpb könyvtár

- **Egyszerű korlátok** (korlát tár elemei): tetszőleges korlát (Boole-egyesítők formájában).
 - **Korlát-megoldó algoritmus:** Boole-egyesítés.
- A library(clpb) könyvtár eljárásai**
- sat (*Kifejezés*), ahol *Kifejezés* változókból, a 0, 1 konstansokból és atomokból (ún. szimbolikus konstansok) a fenti műveletekkel felépített logikai kifejezés. Hozzáveszi *Kifejezést* a korlát-tárhoz.
 - taut (*Kif*, *Ért*). Megvizsgálja, hogy *Kif* **levezethető-e** a tárból, ekkor *Ért*=1; vagy negáltja levezethető-e, ekkor *Ért*=0. Egyébként megüszul.
 - labeling (*Változók*). Behelyettesíti a *Változókat* 0, 1 értékekre (úgy, hogy a tár teljesüljön). Visszalépéskor felsorolja az összes lehetséges értéket.

Egyszerű példák

```
| ?- sat(X + Y).                sat(X=\=_A*Y#Y) ?
| ?- sat(x + Y).                sat(Y=\=_A*x#x) ?
| ?- taut(_A ^ (X=\=_A*Y#Y) == X+Y, T).
                                T = 1 ?
| ?- sat(A # B == 0).           B = A ?
| ?- sat(A # B == C), A = B.    B = A, C = 0 ?
| ?- taut(A =< C, T).           no
| ?- sat(A =< B), sat(B =< C), taut(A =< C, T).
                                T = 1,
                                sat(A==_A*_B*C),
                                sat(B==_B*C) ?
```

Megjegyzések

- A tár megjelenítése: $\text{sat}(V := \text{Kif})$ ill. $\text{sat}(V = \text{Kif})$ ahol Kif egy „polinom”, azaz konjunkciókból kizáró vagy (#) művelettel képzett kifejezés.
- Az atommal jelölt szimbolikus konstansok nem behelyettesíthetőek, (legkívül) univerzálisan kvantifikált változóknak tekinthetők.


```
| ?- sat(~x+ ~y:= ~(x*y)).    % ∀xy(¬x ∨ ¬y = ¬(x ∧ y))
                                yes
| ?- sat(~X+ ~Y:= ~(X*Y)).    % ∃?XY(¬X ∨ ¬Y = ¬(X ∧ Y))
                                true ? ; no
| ?- sat(x=<y).                % ∀xy(x → y)
                                no
| ?- sat(X=<y).                % ∀y∃?X(X → y)
                                sat(X:=_A*y) ? ; no
```

Példa: 1-bites összeadó

```
| ?- [user].
| adder(X, Y, Sum, Cin, Cout) :-
    sat(Sum := card([1,3], [X,Y,Cin])),
    sat(Cout := card([2-3], [X,Y,Cin])).
| {user consulted, 40 msec 576 bytes}

yes
| ?- adder(x, y, Sum, cin, Cout).

sat(Sum:=cin#x#y),
sat(Cout:=x*cin#x*y#y*cin) ?

yes
```

Példa: 1-bites összeadó

```
| ?- adder(x, y, Sum, 0, Cout).

sat(Sum:=x#y),
sat(Cout:=x*y) ?

yes
| ?- adder(X, Y, 0, Cin, 1), labeling([X,Y,Cin]).

Cin = 0, X = 1, Y = 1 ? ;

Cin = 1, X = 0, Y = 1 ? ;

Cin = 1, X = 1, Y = 0 ? ;

no
```

Boole-egyesítés

A feladat:

- Adott g és h logikai kifejezések.
- Keressük a $g = h$ egyenletet megoldó legáltalánosabb egyesítőt (mgu).
- Példa: $\text{mgu}(X+Y, 1)$ lehet $X = W * Y \# Y \# 1$ (új változó, pl. W , bejöhethet).
- Egyszerűsítés: A $g = h$ egyenlet helyettesíthető az $f = 0$ egyenlettel, ahol $f = g \# h$.
- Az egyesítés során minden lépésben egy $f = 0$ formulabeli változót szeretnénk kifejezni.

Boole-egyesítés

Az X változó kifejezése

- Jelölés: $f_x(b) = f$ -ből az $X=b$ helyettesítéssel kapott kifejezés ($b = 0;1$)
- $f = 0$ csak akkor kielégíthető ha $f_x(1) * f_x(0) = 0$ az.
- Fejezzük ki X -et $f_x(0)$ -val és $f_x(1)$ -gyel úgy, hogy $f = 0$ legyen!

$f_x(0)$	$f_x(1)$	X
0	0	bármilyen (w)
0	1	0
1	0	1
1	1	érdektelen

Keressük X -et $X = A * \sim W \# B * W$ alakban!

- Határozzuk meg A -t és B -t $f_x(0)$ és $f_x(1)$ függvényeként!

$f_x(0)$	$f_x(1)$	X	A	B
0	0	w	0	1
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1

Az $A = f_x(0)$ és $B = \sim f_x(1)$ megfeleltetés tűnik a legegyszerűbbnek.

Boole-egyesítés

Az egyesítési algoritmus az $f = 0$ egyenlőségre

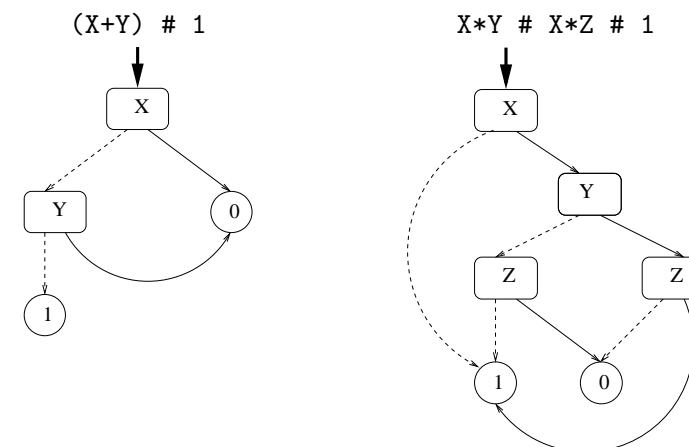
- Ha f -ben nincs változó, akkor azonosnak kell lennie 0-val (különben nem egyesíthető).
- Helyettesítsünk: $X = \sim W * f_x(0) \# W * \sim f_x(1)$ (Boole-egyesítő)
- Folytassuk az egyesítést az $f_x(1) * f_x(0) = 0$ egyenlőségre.

Példák

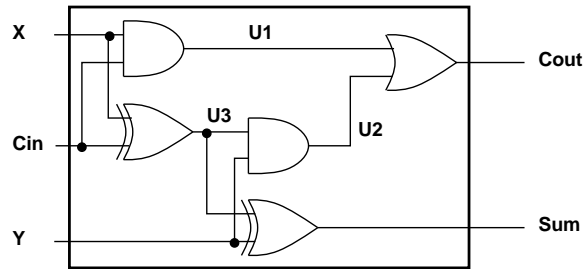
- $\text{mgu}(X+Y, 0) \rightarrow X = 0, Y = 0;$
- $\text{mgu}(X+Y, 1) = \text{mgu}(\sim(X+Y), 0) \rightarrow X = W * Y \# Y \# 1;$
- $\text{mgu}(X*Y, \sim(X*Z)) = \text{mgu}((X*Y)\#(X*Z)\#1, 0) \rightarrow X = 1, Y = \sim Z.$

Belső ábrázolás: BDD (Boolean/Binary Decision Diagrams)

Szaggatott vonal: 0 érték, folytonos vonal: 1 érték



Példa: Hibakeresés áramkörben



```
% Fi jelöli, hogy az i. kapu hibás, legfeljebb egy ilyen van.
fault([F1,F2,F3,F4,F5], [X,Y,Cin], [Sum,Cout]) :-
  sat( card([0-1],[F1,F2,F3,F4,F5]) * % F1..F5 közül legf. 1 igaz
    (F1 + (U1 := X * Cin)) * % F1 igaz, vagy az 1. kapu jó
    (F2 + (U2 := Y * U3)) * % F2 igaz, vagy a 2. kapu jó
    (F3 + (Cout := U1 + U2)) * % ...
    (F4 + (U3 := X # Cin)) *
    (F5 + (Sum := Y # U3))
  ).
```

Példa: Hibakeresés áramkörben

```
| ?- fault(L, [1,1,0], [1,0]).
      L = [0,0,0,1,0] ? ; no

| ?- fault(L, [1,0,1], [0,0]).
      L = [_A,0,_B,0,0],
      sat(_A=\=_B) ? ; no

| ?- fault(L, [1,0,1], [0,0]), labeling(L).
      L = [1,0,0,0,0] ? ;
      L = [0,0,1,0,0] ? ; no

| ?- fault([0,0,0,0,0], [x,y,cin], [Sum,Cout]).
      sat(Cout:=x*cin#x*y#y*cin),
      sat(Sum:=cin#x#y) ? ; no
```

Példa: Tranzisztoros áramkör verifikálása

```
n(D, G, S) :- % Gate => Drain = Source
  sat( G*D := G*S).

p(D, G, S) :- % ~ Gate => Drain = Source
  sat( ~G*D := ~G*S).

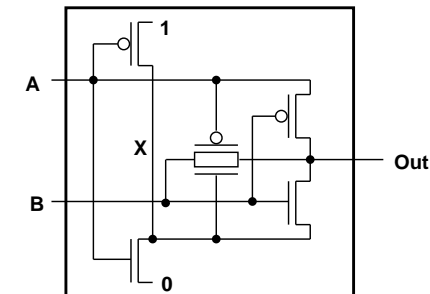
| ?- n(D, 1, S).          S = D ?

| ?- n(D, 0, S).         true ?

| ?- p(D, 0, S).         S = D ?

| ?- p(D, 1, S).         true ?
```

Példa: Tranzisztoros áramkör verifikálása



```
xor(A, B, Out) :-
  p(1, A, X),
  n(0, A, X),
  p(B, A, Out),
  n(B, X, Out),
  p(A, B, Out),
  n(X, B, Out).

| ?- xor(a, b, X).          sat(X:=a#b) ?
```

Minesweeper clpb-ben

```
:- use_module([library(clpb),library(lists)]).

mine(Rows, Cols, Mines, Bd) :-
    length(Bd, Rows), all_length(Bd, Cols),
    append_lists(Bd, All),
    sat(card([Mines], All)), play_mine(Bd, []).

all_length([], _).
all_length([L|Ls], Len) :-
    length(L, Len), all_length(Ls, Len).

append_lists([], []).
append_lists([L|Ls], Es) :-
    append_lists(Ls, Es0), append(L, Es0, Es).
```

Minesweeper clpb-ben

```
neighbs(RCB, N7) :-
    neighbour(-1,-1, RCB, [], N0),
    neighbour(-1, 0, RCB, N0, N1),
    neighbour(-1, 1, RCB, N1, N2),
    neighbour( 0,-1, RCB, N2, N3),
    neighbour( 0, 1, RCB, N3, N4),
    neighbour( 1,-1, RCB, N4, N5),
    neighbour( 1, 0, RCB, N5, N6),
    neighbour( 1, 1, RCB, N6, N7).

neighbour(ROf, COf, n(R0, C0, Bd), Nbs, [E|Nbs]) :-
    R is R0+ROf, C is C0+COf,
    nth1(R, Bd, Row), nth1(C, Row, E), !.
neighbour(_, _, _, Nbs, Nbs).
```

Minesweeper clpb-ben

```
play_mine(Bd, Asked) :-
    select_field(Bd, Asked, R, C, E), !,
    format('Row ~w, col ~w (m for mine)? ', [R,C]),
    read(Ans), process_ans(Ans, E, R, C, Bd),
    play_mine(Bd, [R-C|Asked]).
play_mine(_Bd, _Asked).

select_field(Bd, Asked, R, C, E) :-
    nth1(R, Bd, L), nth1(C, L, E),
    nonmember(R-C, Asked), taut(E, 0), !.
select_field(Bd, Asked, R, C, E) :-
    nth1(R, Bd, L), nth1(C, L, E),
    nonmember(R-C, Asked), \+ taut(E,1), !.

process_ans(m, 1, _, _, _) :-
    format('Mine!~n', []), !, fail.
process_ans(Ans, 0, R, C, Bd) :-
    integer(Ans), neighbs(n(R, C, Bd), Ns),
    sat(card([Ans], Ns)).
```

IV. rész

A CLP elméleti háttere

- 1 Prolog alapok
- 2 A SICStus clp(Q,R) könyvtárai
- 3 A SICStus clp(B) könyvtára
- 4 A CLP elméleti háttere**
- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
- 6 CHR – Constraint Handling Rules
- 7 A Mercury LP megvalósítás

A CLP(\mathcal{X}) séma

Egy adott CLP(\mathcal{X}) meghatározásakor meg kell adni

- a korlát-következtetés tartományát,
- a korlátok szintaxisát és jelentését (függvények, relációk),
- a korlát-megoldó algoritmust.

A korlátok osztályozása

- *egyszerű korlátok* — a korlát-megoldó azonnal tudja kezelni őket;
- *összetett korlátok* — felfüggesztve, démonként várnak arra, hogy a korlát-megoldónak segíthessenek.

A CLP(\mathcal{X}) korlát-megoldók közös vonása: a *korlát tár*

- A korlát tár *konzisztens* korlátok halmaza (konjunkciója).
- A korlát tár elemei egyszerű korlátok.
- A közönséges Prolog végrehajtás során a célsorozat mellett a CLP(\mathcal{X}) rendszer nyilvántartja a korlát tár állapotát:
 - amikor a végrehajtás egy egyszerű korláthoz ér, akkor azt a megoldó megpróbálja hozzávenni a tárhoz;
 - ha az új korlát hozzávételével a tár konzisztens marad, akkor ez a redukciós lépés sikeres és a tár kibővül az új korláttal;
 - ha az új korlát hozzávételével a tár inkonzisztenssé válna, akkor (nem kerül be a tárba és) megghiúsulást, azaz visszalépést okoz;
 - visszalépés esetén a korlát tár is visszaáll a korábbi állapotába.
- Az összetett korlátok démonként (ágensként) várokoznak arra, hogy:
 - egyszerű korláttá váljanak
 - a tárat egy egyszerű következményükkel bővíthessék (az ún. erősítés)

A korlát logikai programozás elmélete

Egy CLP rendszer

- $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle$
- \mathcal{D} : egy tartomány (domain), pl. egészek (N), valósak (R), racionálisak(Q), Boole értékek (B), listák, füzérek (stringek) (+ a Prolog-fastrukturák (Herbrand — H) tartománya)
- \mathcal{F} : \mathcal{D} -ben definiált függvényjelek egy halmaza, pl. +, −, *, ∨, ∧
- \mathcal{R} : \mathcal{D} -ben definiált relációjelek (korlátok) egy halmaza pl. =, ≠, <, ∈
- \mathcal{S} : egy korlát-megoldó algoritmus $\langle \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ -re, azaz a \mathcal{D} tartományban az $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ halmazbeli jelekből felépített korlátokra

CLP szintaxis és deklaratív szemantika

program

- klózok halmaza.

klóz

- szintaxis: $P :- G_1, \dots, G_n$, ahol mindegyik G_i vagy eljáráshívás, vagy korlát.
- deklaratív olvasat: P igaz, ha G_1, \dots, G_n mind igaz.

kérdés

- szintaxis: $?- G_1, \dots, G_n$
- válasz egy Q kérdésre: korlátoknak egy olyan konjunkciója, amelyből a kérdés következik.

Végrehajtási állapot

- $\langle G, s \rangle$
- G — cél/korlát sorozat
- s — korlát-tár: az eddig felhalmozott egyszerű korlátok konjunkciója (kezdetben üres)

Szükséges megkülönböztetés

- egyszerű korlát (c): amit a korlát-tár közvetlenül befogad ($\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ -től függ)
- összetett korlát (C): a tár nem tudja befogadni, de hathat a tárra

Klózok procedurális olvasata

- $P :- G_1, \dots, G_n$ jelentése: P megoldásához megoldandó G_1, \dots, G_n .

Végrehajtási invariánsok

- s konzisztens
- $G \wedge s \rightarrow Q$ (Q a kezdő kérdés)

Végrehajtás vége

- $\langle G_e, s_e \rangle$, ahol G_e -re nem alkalmazható egyetlen következtetési lépés sem.

A végrehajtás eredménye

- Az s_e korlát-tár, vagy annak a kérdésben szereplő változókra való „vetítése” (a többi változó egzisztenciális kvantálásával).
- A G_e fennmaradó (összetett) korlátok.

A CLP következtetés folyamata

Következtetési lépések

- rezolúció:
 - $\langle P \& G, s \rangle \Rightarrow \langle G_1 \& \dots \& G_n \& G, (P = P') \wedge s \rangle$,
feltéve, hogy a programban van egy $P' :- G_1, \dots, G_n$ klóz.
 - Itt $(P = P')$ a klózfej és a hívás egyesítését, illetve az ehhez szükséges behelyettesítések elvégzését jelenti.
- korlát-megoldás:
 - $\langle c \& G, s \rangle \Rightarrow \langle G, s \wedge c \rangle$
- korlát-erősítés:
 - $\langle C \& G, s \rangle \Rightarrow \langle C' \& G, s \wedge c \rangle$
ha s -ből következik, hogy C ekvivalens $(C' \wedge c)$ -vel. ($C' = C$ is lehet.)

Ha a tár inkonzisztensé válna, visszalépés történik.

A CLP következtetés folyamata

Példa erősítésre

- $\langle X > Y * Y \& \dots, Y > 3 \rangle \Rightarrow \langle X > Y * Y \& \dots, Y > 3 \wedge X > 9 \rangle$
hiszen $X > Y * Y \wedge Y > 3 \Rightarrow X > 9$
- $\text{clp}(\mathcal{R})$ -ben nincs ilyen, de $\text{clp}(\text{FD})$ -ben van!

Követelmények a korlát megoldó algoritmussal szemben

- teljesség (egyszerű korlátok konjunkciójáról mindig döntse el, hogy konzisztens-e),
- inkrementalitás (az s tár konzisztenciáját ne bizonyítsa újra),
- a visszalépés támogatása,
- hatékonyság.

V. rész

A SICStus clp(FD) könyvtára

- 1 Prolog alapok
- 2 A SICStus clp(Q,R) könyvtárai
- 3 A SICStus clp(B) könyvtára
- 4 A CLP elméleti háttere
- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
- 6 CHR – Constraint Handling Rules
- 7 A Mercury LP megvalósítás

A SICStus clpfd könyvtár

Tartomány

Egészek (negatívak is) véges (esetleg végtelen) halmaza

Korlátok

- aritmetikai
- halmaz (halmazba tartozás)
- tükrözött
- logikai
- kombinatorikai
- felhasználó által definiált

Egyszerű korlátok

csak a halmaz-korlátok: $X \in \text{Halmaz}$

A SICStus clpfd könyvtár

Tartalom

Korlát-megoldó algoritmus

- egyszerű korlátok kezelése triviális;
- a lényeg az összetett korlátok **erősítő** tevékenysége, ez a Mesterséges Intelligencia CSP (Constraint Satisfaction Problems) ágának módszerein alapul.

Miről lesz szó?

- CSP, mint háttér
- Alapvető (aritmetikai és halmaz-) korlátok
- Tükrözött és logikai korlátok
- Címkéző eljárások
- Kombinatorikai korlátok
- Felhasználó által definiált korlátok: indexikálisok és globális korlátok
- Az FDBG nyomkövető csomag
- Esettanulmányok: négyzetdarabolás, torpedó-, ill. dominó-feladvány

- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
 - CSP, mint háttér
 - Alapvető korlátok
 - Tükrözött és logikai korlátok
 - Kiegészítések és segédeszközök
 - Címkézés
 - Felhasználó által definiált korlátok
 - Kombinatorikus korlátok
 - FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
 - CLPFD esettanulmányok

Háttér: CSP (Constraint Satisfaction Problems)

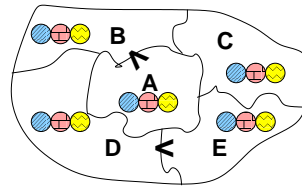
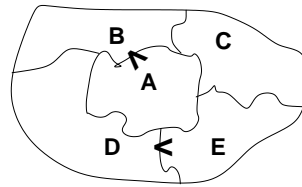
Példafeladat

Az alábbi térkép kiszínezése kék, piros és sárga színekkel úgy, hogy a szomszédos országok különböző színűek legyenek, és ha két ország határán a < jel van, akkor a két szín ábécé-rendben a megadott módon kövesse egymást.

Egy lehetséges megoldási folyamat (zárójelben a CSP elnevezések)

1. Minden mezőben elhelyezzük a három lehetséges színt (változók és tartományaik felvétele).

● Kék ● Piros ● Sárga

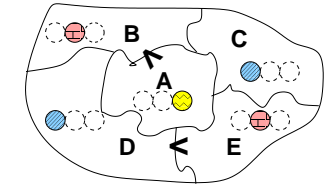
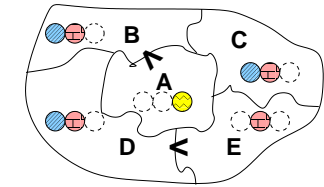
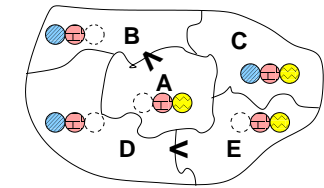


Háttér: CSP (Constraint Satisfaction Problems)

2. Az „A” mező nem lehet kék, mert annál „B” nem lehetne kisebb. A „B” nem lehet sárga, mert annál „A” nem lehetne nagyobb. Az „E” és „D” mezők hasonlóan szűkíthetők (szűkítés, él-konzisztencia biztosítása).

3. Ha az „A” mező piros lenne, akkor mind „B”, mind „D” kék lenne, ami ellentmondás (globális korlát, ill. borotválási technika). Tehát „A” sárga. Emiatt a vele szomszédos „C” és „E” nem lehet sárga (él-konzisztens szűkítés).

4. „C” és „D” nem lehet piros, tehát kék, így „B” csak piros lehet (él-konzisztens szűkítés). Tehát az egyetlen megoldás: A = sárga, B = piros, C = kék, D = kék, E = piros.



A CSP fogalma

- $CSP = (X, D, C)$
 - $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ — változók
 - $D = \langle D_1, \dots, D_n \rangle$ — tartományok, azaz nem üres halmazok
 - x_i változó a D_i véges halmazból (x_i tartománya) vehet fel értéket
 - C a problémában szereplő korlátok (atomi relációk) halmaza, argumentumaik X változói (például $C \ni c = r(x_1, x_3)$, $r \subseteq D_1 \times D_3$)
- A CSP feladat megoldása: minden x_i változóhoz egy $v_i \in D_i$ értéket kell rendelni úgy, hogy minden $c \in C$ korlátot egyidejűleg kielégítsünk.
- **Definíció:** egy c korlát egy x_i változójának d_i értéke *felesleges*, ha nincs a c többi változójának olyan értékrendszere, amely d_i -vel együtt kielégíti c -t.
- **Állítás:** felesleges érték elhagyásával (szűkítés) ekvivalens CSP-t kapunk.
- **Definíció:** egy korlát *él-konzisztens* (arc consistent), ha egyik változójának tartományában sincs felesleges érték. A CSP *él-konzisztens*, ha minden korlátja él-konzisztens. Az él-konzisztencia szűkítéssel biztosítható.
- Ha minden reláció bináris, a CSP probléma gráffal ábrázolható (változó \Rightarrow csomópont, reláció \Rightarrow él). Az él-konzisztencia elnevezés ebből fakad.

A CSP megoldás folyamata

- felvesszük a változók tartományait;
- felvesszük a korlátokat mint démonokat, amelyek szűkítéssel él-konzisztenciát biztosítanak;
- többértelműség esetén címkézést (labeling) végzünk:
 - kiválasztunk egy változót (pl. a legkisebb tartományút),
 - a tartományt két vagy több részre osztjuk (választási pont),
 - az egyes választásokat visszalépéses kereséssel bejárjuk (egy tartomány üresre szűkülése váltja ki a visszalépést).

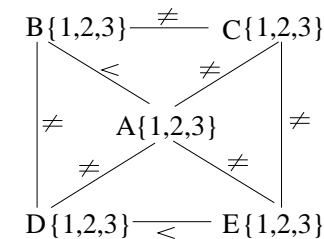
A térképszínezés mint CSP feladat

Modellezés (leképezés CSP-re)

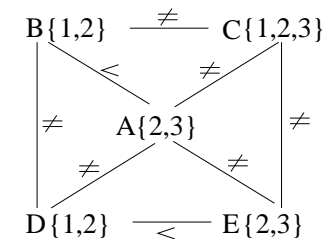
- változók meghatározása: országonként egy változó, amely az ország színét jelenti;
- változóértékek kódolása: kék \rightarrow 1, piros \rightarrow 2, sárga \rightarrow 3 (sok CSP megvalósítás kiköti, hogy a tartományok elemei pl. nem-negatív egészek);
- korlátok meghatározása:
 - az előírt $<$ relációk teljesülnek,
 - a többi szomszédos ország-pár különböző színű.

A térképszínezés mint CSP feladat

A kiinduló korlát-gráf:



A korlát-gráf él-konzisztens szűkítése:

CLP(FD) = a CSP beágyazása a CLP(\mathcal{X}) sémábaA CSP \rightarrow CLP(FD) megfeleltetés

- CSP változó \rightarrow CLP változó
- CSP: x tartománya $T \rightarrow$ CLP: „ $X \text{ in } T$ ” egyszerű korlát.
- CSP korlát \rightarrow CLP korlát, *általában összetett!*

A CLP(FD) korlát-tár

- Tartalma: $X \text{ in } Tartomány$ alakú egyszerű korlátok.
- Tekinthető úgy mint egy hozzárendelés a változók és tartományaik (lehetséges értékek) között.
- Egyszerű korlát hozzávétele a tárhoz: egy már bennlévő változó tartományának szűkítése vagy egy új változó-hozzárendelés felvétele.

CLP(FD) = a CSP beágyazása a CLP(\mathcal{X}) sémába

Összetett CLP(FD) korlátok

- A korlátok többsége démon lesz, hatását a *korlát-erősítésen* keresztül fejt ki ($\langle C, s \rangle \rightarrow \langle C', s \wedge c \rangle$ ahol $s \models C \equiv C' \wedge c$).
- Az erősítés egy egyszerű korlát hozzávételét, azaz a CLP(FD) esetén a tár szűkítését jelenti.
- A démonok ciklikusan működnek: szűkítenek, elalszanak, aktiválódnak, szűkítenek, ...
- A démonokat a korlátbeli változók tartományának változása aktiválja.
- Különböző korlátok különböző mértékű szűkítést alkalmazhatnak (a maximális szűkítés túl drága lehet).

5 A SICStus clp(FD) könyvtára

- CSP, mint háttér
- **Alapvető korlátok**
- Tükrözött és logikai korlátok
- Kiegészítések és segédeszközök
- Címkézés
- Felhasználó által definiált korlátok
- Kombinatorikus korlátok
- FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
- CLPFD esettanulmányok

Alapvető aritmetikai korlátok (ún. **formula**-korlátok)

- Függvények
 - + - * / mod min max (kétargumentumúak),
 - abs (egyargumentumú).
- Korlát-relációk: #<, #>, #=<, #>=, #= #\= (mind xfx 700 operátorok)

Halmazkorlátok

- $X \text{ in } \textit{KTartomány}$, jelentése: $X \in H$, ahol H a $\textit{KTartomány}$ (konstans tartomány) által leírt halmaz (Az in atom egy xfx 700 operátor);
- $\text{domain}([X, Y, \dots], \textit{Min}, \textit{Max})$: $X \in [\textit{Min}, \textit{Max}]$, $Y \in [\textit{Min}, \textit{Max}]$, ...

Itt \textit{Min} lehet $\textit{Szám}$ vagy $\text{inf}(-\infty)$, \textit{Max} pedig $\textit{Szám}$ vagy $\text{sup}(+\infty)$;
(Megjegyzés: a végtelen tartományok főleg kényelmi célokat szolgálnak: nem kell kiszámolnunk az alsó/felső korlátokat, ha azok kikövetkeztethetők.)

A clpfd könyvtár — alapvető-korlátok

Egy $\textit{KTartomány}$ a következők egyike lehet:

- felsorolás: $\{\textit{Szám}, \dots\}$,
- intervallum: $(\textit{Min}.. \textit{Max})$, (xfx 550 operátor),
- metszet: $\textit{KTartomány} \setminus \textit{KTartomány}$ (yfx 500, beépített op.),
- únió: $\textit{KTartomány} \setminus / \textit{KTartomány}$, (yfx 500, beépített op.),
- komplement: $\setminus \textit{KTartomány}$, (fy 500 operátor).

Példák

```
| ?- X in (10..20)\ (\{15}), Y in 6..sup, Z # = X+Y.
```

```
    X in(10..14)\/(16..20), Y in 6..sup, Z in 16..sup ?
```

```
| ?- X in 10..20, X #\ = 15, Y in {2}, Z # = X*Y.
```

```
    Y = 2, X in(10..14)\/(16..20), Z in 20..40 ?
```

A térképszínezési feladat SICStus-ban

```
| ?- use_module(library(clpfd)).
...
| ?- domain([A,B,C,D,E], 1, 3),
    A #> B, A #\ = C, A #\ = D, A #\ = E,
    B #\ = C, B #\ = D, C #\ = E, D #< E.
    A in 2..3, B in 1..2,
    C in 1..3, D in 1..2, E in 2..3 ? ;
no

| ?- domain([A,B,C,D,E], 1, 3),
    A #> B, A #\ = C, A #\ = D, A #\ = E,
    B #\ = C, B #\ = D, C #\ = E, D #< E,
    member(A, [1,2,3]). % címkézés, hivatalosan:
% indomain(A). % vagy:
% labeling([], [A]). % általános:
% labeling([], [A,B,C,D,E]).
    A = 3, B = 2, C = 1, D = 1, E = 2 ? ;
no

| ?- domain([A,B,C,D,E], 1, 3),
    A #> B, A #\ = D, B #\ = C, B #\ = D, D #< E,
% A #\ = C, A #\ = E, C #\ = E helyett:
all_distinct([A,C,E]).
% Az "A, C, E különbözőek" korlát okos
% megvalósítása, globális kombinatorikai korláttal
    A = 3, B = 2, C = 1, D = 1, E = 2 ? ; no
```

Címkéző könyvtári eljárások — rövid előzetes

- `indomain(X)`: X -et a tartománya által megengedett értékkel helyettesíti, visszalépéskor felsorolja az összes értéket (növekedő sorrendben)
- `labeling(Opciók, Változók)`: A *Változók* lista minden elemét behelyettesíti, az *Opciók* lista által előírt módon.

CSP/CLP programok: klasszikus példa

Kódaritmetikai feladat: SEND+MORE=MONEY

A feladvány: Írjon a betűk helyébe számjegyeket (azonosak helyébe azonosakat, különbözők helyébe különbözőeket), úgy hogy az egyenlőség igaz legyen. Szám elején nem lehet 0 számjegy.

```
send(SEND, MORE, MONEY) :-
    length(List, 8),
    domain(List, 0, 9),           % tartományok
    send(List, SEND, MORE, MONEY), % korlátok
    labeling([], List).          % címkézés
```

```
send(List, SEND, MORE, MONEY) :-
    List= [S,E,N,D,M,O,R,Y],
    alldiff(List), S #\= 0, M# \= 0,
    SEND #= 1000*S+100*E+10*N+D,
    MORE #= 1000*M+100*O+10*R+E,
    MONEY #= 10000*M+1000*O+100*N+10*E+Y,
    SEND+MORE #= MONEY.
```

CSP/CLP programok: klasszikus példa

```
% alldiff(L): L elemei mind különbözőek (buta
% megvalósítás). Lényegében azonos a beépített
% all_different/1 kombinatorikai globális korláttal.
alldiff([]).
alldiff([X|Xs]) :- outof(X, Xs), alldiff(Xs).
```

```
outof(_, []).
outof(X, [Y|Ys]) :- X #\= Y, outof(X, Ys).
```

```
| ?- send(SEND, MORE, MONEY).
    MORE = 1085, SEND = 9567, MONEY = 10652 ? ; no
| ?- List=[S,E,N,D,M,O,R,Y], domain(List, 0, 9),
    send(List, SEND, MORE, MONEY).
    List = [9,E,N,D,1,0,R,Y],
    SEND in 9222..9866,
    MORE in 1022..1088,
    MONEY in 10244..10888,
    E in 2..8, N in 2..8, D in 2..8,
    R in 2..8, Y in 2..8 ? ; no
```

Szűkítési szintek

Informálisan, $r(X, Y)$ bináris relációra

- Tartomány-szűkítés: X tartományából minden olyan x értéket elhagyunk, amelyhez nem található Y tartományában olyan y érték, amelyre $r(x, y)$ fennáll. Hasonlóan szűkítjük Y tartományát. (Ez él-konzisztenciát eredményez.)
- Intervallum-szűkítési lépés: X tartományából elhagyjuk annak **alsó vagy felső** határát, ha ahhoz nem található Y **tartományának szélső értékei közé eső** olyan y érték, amelyre $r(x, y)$ fennáll, és fordítva. Ezeket a lépéseket ismételjük, ameddig szükséges.

Szűkítési szintek – példa

- Legyen
 - $r(X, Y) : X = \text{abs}(Y)$.
 - X tartománya $0..5$
 - Y tartománya $\{-1, 1, 3, 4\}$
- A tartomány-szűkítés elhagyja X tartományából a $0, 2, 5$ értékeket, eredménye $X \in \{1, 3, 4\}$.
- Az intervallum-szűkítés X tartományából csak az 5 értéket hagyja el, eredménye $X \in 0..4$.
- Az intervallum-szűkítés kétféle módon is gyengébb mint a tartomány-szűkítés:
 - csak a tartomány szélső értékeit hajlandó elhagyni, ezért nem hagyja el a 2 értéket;
 - a másik változó tartományában nem veszi figyelembe a „lukakat”, így a példában Y tartománya helyett annak *lefedő intervallumát*, azaz a $-1..4$ intervallumot tekinti — ezért nem hagyja el X -ből a 0 értéket.
- Ugyanakkor az intervallum-szűkítés általában konstans idejű művelet, míg a tartomány-szűkítés ideje (és az eredmény mérete) függ a tartományok méretétől.

Szűkítési szintek – definíciók

Jelölések

- Legyen C egy n -változós korlát, s egy tár,
- $D(X, s)$ az X változó tartománya az s tárban,
- $D'(X, s) = \min(D(X, s)).. \max(D(X, s))$, az X változó tartományát *lefedő* (legsűkebb) *intervallum*.

A szűkítési szintek definíciója

- Tartomány-szűkítés (domain consistency)
 C tartomány-szűkítő, ha minden szűkítési lépés lefutása után az adott C korlát él-konzisztens, azaz bármelyik X_i változójához és annak tetszőleges $V_i \in D(X_i, s)$ megengedett értékéhez található a többi változónak olyan $V_j \in D(X_j, s)$ értéke ($j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$), hogy $C(V_1, \dots, V_n)$ fennálljon.
- Intervallum-szűkítés (interval consistency)
 C intervallum-szűkítő, ha minden szűkítési lépés lefutása után igaz, hogy C bármelyik X_i változója esetén e változó tartományának mindkét **végpontjához** (azaz a $V_i = \min(D(X_i, s))$ illetve $V_i = \max(D(X_i, s))$ értékekhez) található a többi változónak olyan $V_j \in D'(X_j, s)$ értéke ($j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$), hogy $C(V_1, \dots, V_n)$ fennálljon.

Szűkítési szintek – definíciók

Megjegyzések

- A tartomány-szűkítés lokálisan (egy korlátra nézve) a lehető legjobb;
- **DE** mégha minden korlát tartomány-szűkítő, a megoldás nem garantálható, pl.
 $| \text{?- domain}([X, Y, Z], 1, 2), X \# = Y, X \# = Z, Y \# = Z.$
- Egy CLP(FD) probléma megoldásának hatékonysága fokozható:
 - több korlát összefogását jelentő ún. globális korlátokkal, pl.
 $\text{all_distinct}(L)$: Az L lista csupa különböző elemből áll;
 - redundáns korlátok felvételével.

Garantált szűkítési szintek SICStusban

A SICStus által garantált szűkítési szintek

- A halmaz-korlátok (triviálisan) tartomány-szűkítők.
- A *lineáris* aritmetikai korlátok legalább intervallum-szűkítők.
- A nem-lineáris aritmetikai korlátokra nincs garantált szűkítési szint.
- Ha egy változó valamelyik határa végtelen (inf vagy sup), akkor a változót tartalmazó korlátokra nincs szűkítési garancia (bár az aritmetikai és halmaz-korlátok ilyenkor is szűkítene).
- A később tárgyalandó korlátokra egyenként megadjuk majd a szűkítési szintet.

Garantált szűkítési szintek SICStusban – példák

```
| ?- X in {4,9}, Y in {2,3}, Z #= X-Y.
    % intervallum-szűkítő:
    X in {4}\{9}, Y in 2..3, Z in 1..7 ?

| ?- X in {4,9}, Y in {2,3}, plus(Y, Z, X).
    % plus(A, B, C): A+B=C tartomány-szűkítő módon
    X in {4}\{9}, Y in 2..3, Z in(1..2)\(6..7) ?

| ?- domain([X,Y], -10, 10), X*X+2*X+1 #= Y.
    % Ez nem interv.-szűkítő, Y<0 nem lehet!
    X in -4..4, Y in -7..10 ?

| ?- domain([X,Y], -10, 10), (X+1)*(X+1) #= Y.
    % bár ez nem garantált, de intervallum-szűkítő:
    X in -4..2, Y in 0..9 ?
```

Korlátok végrehajtása

A végrehajtás fázisai

- A korlát kifejtése elemi korlátokra (fordítási időben, lásd később)
pl. $X*X \#< 17 \implies X*X \#= Z, Z \#< 17$
- A korlát felvétele (posting):
 - azonnali végrehajtás (pl. $X \#< 3$), vagy
 - démon létrehozása: első szűkítés elvégzése, újra-aktiválási feltételek meghatározása, a démon elaltatása.
- A démon aktiválása
 - szűkítés elvégzése,
 - döntés a folytatásról:
 - a démon lefut (ha a korlát már következménye a tárnak);
 - vagy a démon újra elalszik.

Korlátok végrehajtása

Elemi korlátok működése — példák

A $\# =$ B (tartomány-szűkítő)

- Mikor **aktiválódik**? Ha vagy A vagy B konkrét értéket kap.
- Hogyan **szűkít**? A felvett értéket kihagyja a másik változó tartományából.
- Hogyan **folytatódik** a démon végrehajtása?
A démon befejezi működését (lefut).

A $\# <$ B (tartomány-szűkítő)

- **Aktiválás**: ha A alsó határa (min A) vagy B felső határa (max B) változik
- **Szűkítés**: A tartományából kihagyja az $X \geq \max B$ értékeket,
B tartományából kihagyja az $Y \leq \min A$ értékeket
- **Folytatás**: ha $\max A < \min B$, akkor lefut, különben újra elalszik.
(SICStusban: lefut, ha A vagy B behelyettesítődik.)

Korlátok végrehajtása – további példák

`all_distinct([A1,...])` (tartomány-szűkítő)

- **Aktiválás**: ha bármelyik változó tartománya változik
- **Szűkítés**: (páros gráfokban maximális párosítást kereső algoritmus segítségével) minden olyan értéket elhagy, amelyek esetén a korlát nem állhat fenn. Példa:


```
| ?- A in 2..3, B in 2..3, C in 1..3,
    all_distinct([A,B,C]).
    C = 1, A in 2..3, B in 2..3 ?
```
- **Folytatás**: ha már csak egy nem-konstans argumentuma van, akkor lefut, különben újra elalszik. (Jobb döntésnek tűnhet lefutni, ha a tartományok mind diszjunktak, de a SICStus nem így csinálja, valószínűleg nem éri meg.)

Korlátok végrehajtása – további példák

$X+Y \neq T$ (intervallum-szűkítő)

- **Aktiválás:** ha bármelyik változó alsó vagy felső határa változik
- **Szűkítés:**
 - T-t szűkíti a $(\min(X)+\min(Y)) \dots (\max(X)+\max(Y))$ intervallumra,
 - X-t szűkíti a $(\min(T)-\max(Y)) \dots (\max(T)-\min(Y))$ intervallumra,
 - Y-t szűkíti a $(\min(T)-\max(X)) \dots (\max(T)-\min(X))$ intervallumra.
- **Folytatás:** ha (a szűkítés után) mindhárom változó konstans, akkor lefut, különben újra elalszik.

Példa a szűkítések kölcsönhatására

```
| ?- domain([X,Y], 0, 100), X+Y #=10, X-Y #=4,
      X in 4..10, Y in 0..6 ?
```

```
| ?- domain([X,Y], 0, 100), X+Y #=10, X+2*Y #=14,
      X = 6, Y = 4 ?
```

Globális aritmetikai korlátok

`scalar_product(Coeffs, Xs, Relop, Value[,Options])`

Igaz, ha a `Coeffs` és `Xs` listák skalárszorzata a `Relop` relációban van a `Value` értékkel, ahol `Relop` aritmetikai összehasonlító operátor (`#=`, `#<`, stb.). Alapértelmezésben intervallum-szűkítést biztosít, kivéve ha `Options = [consistency(domain)]`, amikor is tartomány-konzisztensen szűkít. `Coeffs` egészekből álló lista, `Xs` elemei és `Value` egészek vagy korlát változók lehetnek.

Megjegyzés: minden lineáris aritmetikai korlát átalakítható egy `scalar_product` hívássá.

`sum(Xs, Relop, Value)`

Jelentése: $\sum Xs \text{ Relop Value}$.

Ekvivalens a következővel: `scalar_product(Csupa1, Xs, Relop, Value)`, ahol `Csupa1` csupa 1 számból álló lista, `Xs`-sel azonos hosszú.

`minimum(Value, Xs), maximum(Value, Xs)`

Jelentése: az `Xs` lista elemeinek minimuma/maximuma `Value`.

Példa globális aritmetikai korlátok használatára

```
send2(List, SEND, MORE, MONEY) :-
    List= [S,E,N,D,M,O,R,Y],
    Pow10 = [1000,100,10,1],
    all_different(List), S #\= 0, M#\= 0,
    scalar_product(Pow10, [S,E,N,D], #=, SEND),
    % SEND #= 1000*S+100*E+10*N+D,
    scalar_product(Pow10, [M,O,R,E], #=, MORE),
    % MORE #= 1000*M+100*O+10*R+E,
    scalar_product([10000|Pow10], [M,O,N,E,Y],
                  #=, MONEY),
    % MONEY #= 10000*M+1000*O+100*N+10*E+Y,
    SEND+MORE #= MONEY.
```

Miért más a CLP(FD), mint a többi CLP rendszer?

A CLP könyvtárak összehasonlítása

	clpq/r	clpb	clpfd
Korlátok:	aritmetikai	logikai	aritmetikai, logikai, kombinatorikai,...
Egyszerű korlátok:	lineárisak	összes	$X \text{ in } \text{Halmaz}$
Összetett korlátok végrehajtása:	várakozás, míg lineáris nem lesz	nincs ilyen	erősítés (szűkítés)
A tár konzisztenciájának biztosítása:	Gauss elimináció, szimplex módszer	Bináris Döntési Diagrammok	triviális: $X \text{ in } \text{Halmaz} \rightarrow \text{Halmaz}$ nem üres
Az összes korlát konzisztenciájának biztosítása:	lineáris esetben automatikus	automatikus	csak címkézéssel keresztül
Átlátszóság:	fekete doboz	fekete doboz	üveg-doboz
Kiterjeszthetőség:	nem	nem	igen

Miért más a CLP(FD), mint a többi CLP rendszer?

A CLP(FD) fő jellemzői

- A tár konzisztenciájának biztosítása triviális.
- A lényeg a démonok erősítő (szűkítő) működésében van.
- A démonok nem látják egymást, csak a táron keresztül hatnak egymásra.
- Globális korlátok: egyszerre több (akárhány) korlátot helyettesítenek, így erősebb szűkítést adnak (pl. `all_distinct`).
- A megoldás megléte általában csak a címkézéskor derül ki.

A CLP(FD) jellemzői — példák

```
| ?- domain([X,Y,Z], 1, 2), X #\= Y, X #\= Z, Y #\= Z.  
      X in 1..2, Y in 1..2, Z in 1..2 ?
```

```
| ?- X #> Y, Y #> X.  
      Y in inf..sup, X in inf..sup ?
```

```
| ?- domain([X,Y], 1, 10), X #> Y, Y #> X.  
      no
```

```
| ?- statistics(runtime,_),  
      ( domain([X,Y], 1, 100000000), X #> Y, Y #> X  
      ; statistics(runtime,[_],T)),  
      findall(K-V, fd_statistics(K,V), L)  
      ).
```

```
T = 7915,
```

```
L = [resumptions-100000001,entailments-1,prunings-100000002,  
      backtracks-1,constraints-2] ?
```

CLPFD statisztikák lekérdezése

- `fd_statistics(Kulcs, Érték)`: A Kulcs-hoz tartozó számlálót Érték-vel egyesíti, majd **lenullázza**. Lehetséges kulcsok és számlált események:
 - `constraints` — korlát létrehozása;
 - `resumptions` — korlát felébresztése;
 - `entailments` — korlát (vagy negáltja) levezethetővé válásának észlelése;
 - `prunings` — tartomány szűkítése;
 - `backtracks` — a tár ellentmondásossá válása (Prolog megghiúsulások nem számítanak).
- `fd_statistics`: az összes számláló állását kiírja és lenullázza őket.

A szűkítések nyomkövetése az FDBG könyvtár segítségével

```
| ?- use_module(library(fdbg)).  
| ?- fdbg_on, fdbg_assign_name(X, x), fdbg_assign_name(Y, y),  
      domain([X,Y], 1, 10), X #> Y, Y #> X.
```

```
domain([<x>,<y>],1,10) ==> x = inf..sup -> 1..10, y = inf..sup -> 1..10  
      Constraint exited.
```

```
<x> #> <y> ==> x = 1..10 -> 2..10, y = 1..10 -> 1..9
```

```
<x> #< <y> ==> x = 2..10 -> 2..8, y = 1..9 -> 3..9
```

```
<x> #> <y> ==> x = 2..8 -> 4..8, y = 3..9 -> 3..7
```

```
<x> #< <y> ==> x = 4..8 -> 4..6, y = 3..7 -> 5..7
```

```
<x> #> <y> ==> x = 4..6 -> {6}, y = 5..7 -> {5}
```

```
      Constraint exited.
```

```
<x> #< <y> ==> x = {6}, y = {5}
```

```
      Constraint failed.
```

```
no
```


Klasszikus CSP/CLP programok: a „zebra” feladat

A feladvány

Egy utcában öt különböző színű ház van egymás mellett. A házakban különböző nemzetiségű és foglalkozású emberek laknak. Mindenki különböző háziállatot tart és más-más a kedvenc italuk is. A következőket tudjuk.

- Az angol a piros házban lakik.
- A festő japán.
- A norvég a balszélső házban lakik.
- A zöld ház a fehérnek jobboldali szomszédja.
- A diplomata a sárga házban lakik.
- A hegedűművész gyümölcslevet iszik.
- Az orvos szomszédja rókát tart.
- A spanyol kutyát tart.
- Az olasz a teát kedveli.
- A zöld házban lakó kávéét iszik.
- A szobrász csigát tart.
- A tejet a középső házban kedvelik.
- A norvég a kék ház mellett lakik.
- A diplomata melletti házban lovat tartanak.

Kérdés: Kinek a háziállata a zebra (és ki iszik vizet)?

(Lásd pl. <https://www.ps.uni-saarland.de/alice/manual/cptutorial/node30.html>)

A „zebra” feladvány CLPFD megoldása

```
:- use_module(library(lists)).      :- use_module(library(clpfd)).

% ZOwner a zebra tulajdonosának nemzetisége, All az
% összes változó értéke a "Kié a zebra" feladványban.
zebra(ZOwner, All):-
    All = [England,Spain,Japan,Norway,Italy,
           Dog,Zebra,Fox,Snail,Horse,
           Green,Red,Yellow,Blue,White,
           Painter,Diplomat,Violinist,Doctor,Sculptor,
           Juice,Water,Tea,Coffee,Milk],
    domain(All, 1, 5),
    all_different([England,Spain,Japan,Norway,Italy]),
    all_different([Green,Red,Yellow,Blue,White]),
    all_different([Painter,Diplomat,Violinist, Doctor,Sculptor]),
    all_different([Dog,Zebra,Fox,Snail,Horse]),
    all_different([Juice,Water,Tea,Coffee,Milk]),
    zebra_constraints(All), labeling([], All),
    nth1(N, [England,Spain,Japan,Norway,Italy], Zebra),
    nth1(N, [england,spain,japan,norway,italy], ZOwner).
```

Klasszikus CSP/CLP programok: a „zebra” feladat

Modellezés

- Változók meghatározása: egy-egy változó tartozik minden nemzetiséghez, háziállathoz, házsínhez, foglalkozáshoz és italhoz.
- Változóértékek kódolása: A változó értéke annak a háznak a száma (balról számozva), amelynek lakóját, állatát, színét, stb. jelöli az adott változó.
- Korlátok meghatározása:
 - az egyes változó-csoportok mind különböznek: all_different/1 könyvtári korlát, pl.

$$\text{all_different}([\text{Angol}, \text{Spanyol}, \text{Japán}, \text{Norvég}, \text{Olasz}])$$
 - két tulajdonság azonossága: egy $\# =$ korlát, pl. „Az angol a piros házban lakik.” \implies Angol $\# =$ Piros
 - két tulajdonság szomszédossága: házsámok különbsége 1, ill. 1 abszolút értékű, pl. „A norvég a kék ház mellett lakik” \implies abs(Norvég-Kék) $\# = 1$
 - A sorban egy konkrét ház megnevezése: egy számmal való egyenlőség, pl. „A tejet a középső házban kedvelik.” \implies Tej $\# = 3$.

A „zebra” feladvány CLPFD megoldása

```
zebra_constraints(All) :-
    All = [England,Spain,Japan,Norway,Italy,
           Dog,_Zebra,Fox,Snail,Horse,
           Green,Red,Yellow,Blue,White,
           Painter,Diplomat,Violinist,Doctor,Sculptor,
           Juice,_Water,Tea,Coffee,Milk],
    England  $\# =$  Red,           Spain  $\# =$  Dog,
    Japan  $\# =$  Painter,        Italy  $\# =$  Tea,
    Norway  $\# = 1$ ,            Green  $\# =$  Coffee,
    Green  $\# =$  White+1,        Sculptor  $\# =$  Snail,
    Diplomat  $\# =$  Yellow,      Milk  $\# = 3$ ,
    Violinist  $\# =$  Juice,      nexttto(Norway, Blue),
    nexttto(Fox, Doctor),     nexttto(Horse, Diplomat).

% A és B szomszédos számok.
nexttto(A, B) :- abs(A-B)  $\# = 1$ .

| ?- zebra(ZOwner, All).
    All = [3,4,5,1,2,4,5,1,3,2|...],
    ZOwner = japan ? ; no
```

CSP/CLP programok: N vezér a sakktáblán

A feladvány

Egy $N \times N$ -es sakktáblán N vezért kell elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse semelyik másikat, azaz ne legyen két vezér ugyanabban a sorban, ugyanabban az oszlopban, vagy ugyanazon átlós irányú vonal mentén.

Modellezés

- Változók meghatározása: minden vezérhez egy változót rendelünk. Az X_i változó írja le az i . sorban levő vezér helyzetét.
- Változóértékek kódolása: az X_i változó azt az oszlopot jelöli, amelybe az i . sorban levő vezér kerül.

N vezér a sakktáblán – korlátok meghatározása

- Ne legyen két vezér egy sorban: nem szükséges külön korlát, mert a modellezés (változók jelentése) automatikusan biztosítja.
- Ne legyen két vezér egy oszlopban:
 $X_i \neq X_j$, minden $1 \leq i < j \leq N$ esetén.
- Minden átlós vonalban legfeljebb egy vezér legyen, azaz bármely két vezér vízszintes és függőleges távolsága különbözzék:
 $abs(X_i - X_j) \neq j - i$, minden $1 \leq i < j \leq N$ esetén.
- **Összegezve:** minden X , Y változópárra, amelyek sortávolsága $I > 0$ (azaz $X = X_i, Y = X_j, I = abs(i - j)$), a következő három korlát fennállását kell biztosítani:
 $Y \neq X, Y \neq X - I, Y \neq X + I$
- A fenti korlátok eljárásba foglalása:

```
% Az X és Y oszlopokban I sortávolságra levő
% vezérek nem támadják egymást.
no_threat(X, Y, I) :-
    Y #\= X, Y #\= X-I, Y #\= X+I.
```

N vezér a sakktáblán – Prolog (szervező) kód

```
% A Qs lista N vezér biztonságos elhelyezését mutatja egy N*N-es
% sakktáblán: ha a lista i. eleme j, akkor az i. vezért az i. sor
% j. oszlopába kell helyezni. LabOpts a címkézési opciók listája.
queens(N, Qs, LabOpts) :-
    queens_nolab(N, Qs), labeling(LabOpts,Qs).

% A Qs lista egy biztonságos N vezér elhelyezés.
queens_nolab(N, Qs) :-
    length(Qs, N), domain(Qs, 1, N), safe(Qs).

% safe(Qs): A Qs vezér-lista biztonságos.
safe([]).
safe([Q|Qs]) :- no_attack(Qs, Q, 1), safe(Qs).

% no_attack(Qs, Q, I): A Qs lista által leírt vezérek egyike sem
% támadja a Q által leírt vezért, ahol Qs a (j, j+1, ...) sorbeli
% vezéreket írja le, Q a i. sorbeli vezért, és I = j-i > 0.
no_attack([],_,_).
no_attack([X|Xs], Y, I) :-
    no_threat(X, Y, I), I1 is I+1, no_attack(Xs, Y, I1).
```

N vezér a sakktáblán – Futási példák

```
| ?- queens_nolab(4, Qs).
    Qs = [_A,_B,_C,_D],
        _A in 1..4, _B in 1..4, _C in 1..4, _D in 1..4 ?
| ?- queens_nolab(4, Qs), Qs=[1|_].
    Qs = [1,_A,_B,_C],
        _A in 3..4, _B in {2}\{4}, _C in 2..3 ?
| ?- Qs = [1|_], queens(4, Qs, []).
    no
| ?- queens_nolab(4, Qs), Qs=[2|_].
    Qs = [2,4,1,3] ?
```

2. kis házi feladat: számkeresztrejtvény (kakuro)

- Adott egy keresztrejtvény, amelynek egyes kockáiba 1..Max számokat kell elhelyezni (szokásosan Max = 9).
- A vízszintes és függőleges „szavak” meghatározásaként a benne levő számok összege van megadva.
- Egy szóban levő betűk (kockák) mind különböző értékkel kell bírjanak. (Lásd pl. <https://hu.wikipedia.org/wiki/Kakuro>)

A keresztrejtvény Prolog ábrázolása:

- listák listájaként megadott mátrix;
- a fekete kockák helyén $F \setminus V$ alakú struktúrák vannak, ahol F és V az adott kockát követő függőleges ill. vízszintes szó összege, vagy x , ha nincs ott szó, vagy egy egybetűs szó van;
- a kitöltendő fehér kockákat (különböző) változók jelzik.

Megjegyzés:

- A címkézéshez (amiről részletesen még nem volt szó) elegendő a labeling([], Változólista) eljárás hívás használata.

2. kis házi feladat: számkeresztrejtvény

A megírandó Prolog eljárás és használata

```
% szamker(SzK, Max): SzK az 1..Max számokkal
% helyesen kitöltött számkeresztrejtvény.
% Megjegyzés: egyes sorban/oszlopban közepén
% is lehet 'x'!
```

```
pelda(mini, [[x\ x,11\ x,21\ x, 8\ x],
             [x\24,  _,  _,  _],
             [x\10,  _,  _,  _],
             [x\6,   _,  _,  x\ x]], 9).
```

	11	21	8
24	8	9	7
10	2	7	1
6	1	5	

```
| ?- pelda(mini, SzK, _Max), szamker(SzK, _Max).
      SzK = [[x\ x, 11\ x, 21\ x, 8\ x],
             [x\24, 8, 9, 7 ],
             [x\10, 2, 7, 1 ],
             [x\6, 1, 5, x\ x]] ? ; no
```

Egy bonyolultabb példa: mágikus sorozatok

Definíció: Egy $L = (x_0, \dots, x_{n-1})$ sorozat *mágikus* ($x_i \in [0..n-1]$), ha L -ben az i szám pontosan x_i -szer fordul elő (minden $i \in [0..n-1]$ -re).

Példa: $n=4$ esetén (1,2,1,0) és (2,0,2,0) mágikus sorozatok.

```
% Az L lista egy N hosszúságú mágikus sorozat.
```

```
magikus(N, L) :-
```

```
    length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
    elofordulasok(L, 0, L),
    labeling([], L).           % most felesleges
```

```
% elofordulasok([E_i, E_{i+1}, ...], i, Sor): Sor-ban az i
```

```
% szám E_i-szer, az i+1 szám E_{i+1}-szer stb. fordul elő.
```

```
elofordulasok([], _, _).
```

```
elofordulasok([E|Ek], I, Sor) :-
```

```
    pontosan(I, Sor, E),
    J is I+1, elofordulasok(Ek, J, Sor).
```

```
% pontosan(I, L, E): Az I szám L-ben E-szer fordul elő.
```

```
pontosan(I, L, 0) :- outof(I, L).           % (lásd 143. dia)
```

```
pontosan(I, [I|L], N) :-
```

```
    N #> 0, N1 #= N-1, pontosan(I, L, N1).
```

```
pontosan(I, [X|L], N) :-
```

```
    N #> 0, X #\= I, pontosan(I, L, N).
```

Egy bonyolultabb példa: mágikus sorozatok

Példafutás:

```
| ?- spy pontosan/3, magikus(4, L).
+      1      1 Call: pontosan(0, [_A, _B, _C, _D], _A) ? s
?+     1      1 Exit: pontosan(0, [1,0, _C, _D], 1) ? z
+      2      1 Call: pontosan(1, [1,0, _C, _D], 0) ? s
+      2      1 Fail: pontosan(1, [1,0, _C, _D], 0) ? z
+      1      1 Redo: pontosan(0, [1,0, _C, _D], 1) ? s
?+     1      1 Exit: pontosan(0, [2,0,0, _D], 2) ? z
(...)
+      4      1 Call: pontosan(2, [2,0,0, _D], 0) ? s
+      4      1 Fail: pontosan(2, [2,0,0, _D], 0) ? z
(...)
?+     1      1 Exit: pontosan(0, [3,0,0,0], 3) ? z
(...)
?+     1      1 Exit: pontosan(0, [2,0, _D, 0], 2) ?
```

Mágikus sorozatok: redundáns korlátok

Állítás: Ha az $L = (x_0, \dots, x_{n-1})$ sorozat mágikus, akkor $\sum_{i < n} x_i = n$, és $\sum_{i < n} i * x_i = n$.

Hatékonyabb változat, a fenti redundáns korlátokkal

% N=10 esetén kb. 50-szer gyorsabb az előző programnál!

```
magikus2(N, L) :-
    length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
    osszege(L, S), %  $\sum L_i = S$ 
    szorzossege(L, 0, SP), %  $\sum i * L_i = SP$ 
    call(S #= N), call(SP #= N), % lásd a megjegyzést
    elfordulasok(L, 0, L). % lásd az előző változatnál
```

Megjegyzés

- Az aritmetikai beépített eljárások megengednek (aritmetikai) struktúrákat tartalmazó változókat, pl. $Kif = S1+S2, \dots, Kif \# = 0$.
- CLPFD-ben ez nem megengedett: $Kif=S1+S2, \dots, Kif \# = 0$
 \implies Hiba! Ennek oka: a korlát-kifejtés csak betöltéskor történik meg.
- A megoldás a korlát-kifejtési fázis késleltetése: $Kif=S1+S2, \dots,$
 $call(Kif \# = 0)$.

Tartalom

5 A SICStus clp(FD) könyvtára

- CSP, mint háttér
- Alapvető korlátok
- Tükrözött és logikai korlátok
- Kiegészítések és segédeszközök
- Címkézés
- Felhasználó által definiált korlátok
- Kombinatorikus korlátok
- FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
- CLPFD esettanulmányok

Mágikus sorozatok: redundáns korlátok

Segéd eljárások

```
% osszege(L, Ossz): Ossz =  $\sum L_i$ 
osszege([], 0).
osszege([X|L], X+S) :- osszege(L, S).
```

```
% szorzossege(L, I, Ossz): Ossz =  $I * L_1 + (I+1) * L_2 + \dots$ 
szorzossege([], _, 0).
szorzossege([X|L], I, I*X+S) :-
    J is I+1, szorzossege(L, J, S).
```

```
| ?- magikus2(4, L).
% visszalépés nélkül adja ki az első megoldást!
+      1      1 Call: pontosan(0, [_A,_B,_C,_D],_A) ?
(...)
?+      1      1 Exit: pontosan(0, [2,0,2,0],2) ? z
```

Reifikáció: korlátok tükrözése

Egy C korlát tükrözése (reifikációja):

- a korlát igazságértékének „tükrözése” egy 0-1 értékű korlát-változóban;
- jelölése: $C \# \leq \Rightarrow B$, azaz B tartománya 0..1 és B csakkor 1, ha C igaz;
- példa: $(X \# \geq 3) \# \leq \Rightarrow B$ jelentése: B csakkor 1 ha $X \geq 3$ fennáll.

Tükrözhető korlátok:

- az operátoros jelölésű aritmetikai korlátok ($\# =, \# <$ stb.);
- az operátoros jelölésű halmaz-korlát ($X \text{ in } \dots$);
- A globális korlátok (pl. `all_different/1`, `all_distinct/1`) **nem** tükrözhetőek, egyetlen kivétel: `scalar_product/[4,5]`.

Megjegyzések

- A tükrözött korlátok is „közönséges” korlátok, csak definíciójuk és végrehajtásuk módja speciális.
- Példa: a 0..5 tartományon az $(X \# \geq 3) \# \leq \Rightarrow B$ korlát teljesen megegyezik a $B \# = X/3$ korláttal.

Reifikáció: korlátok tükrözése

Tükrözött korlátok végrehajtása

- A $C \#<=> B$ tükrözött korlát végrehajtása többféle szűkítést igényel:
 - a. amikor B -ről kiderül valami (azaz behelyettesítődik): ha $B=1$, fel kell venni (*post*) a korlátot, ha $B=0$, fel kell venni a negáltját.
 - b. amikor C -ről kiderül, hogy levezethető a tárból: $B=1$ kell legyen
 - c. amikor $\neg C$ -ről kiderül, hogy levezethető a tárból: $B=0$ kell legyen
- A fenti a., b. és c. szűkítések elvégzését három különböző démon végzi.
- A levezethetőség-vizsgálat (b. és c.) különböző „ambíciókkal”, különböző bonyolultsági szinteken végezhető el.

Reifikáció – példák

- Alappélda, csak B szűkül:

$$| \text{?- } X\#>3 \#<=> B. \quad \Rightarrow B \text{ in } 0..1$$
- Ha B értéket kap, akkor a rendszer felveszi a korlátot ill. a negáltját:

$$| \text{?- } X\#>3 \#<=> B, B = 1. \quad \Rightarrow X \text{ in } 4..sup$$

$$| \text{?- } X\#>3 \#<=> B, B = 0. \quad \Rightarrow X \text{ in } inf..3$$
- Ha levezethető a korlát vagy negáltja, akkor B értéket kap.

$$| \text{?- } X\#>3 \#<=> B, X \text{ in } 15..sup. \quad \Rightarrow B = 1$$

$$| \text{?- } X\#>3 \#<=> B, X \text{ in } inf..0. \quad \Rightarrow B = 0$$
- Ha a tár megengedi a korlát és negáltja teljesülését is, akkor B nem kap értéket.

$$| \text{?- } X\#>3 \#<=> B, X \text{ in } 3..4. \quad \Rightarrow B \text{ in } 0..1$$

Reifikáció – példák

- A rendszer kikövetkezteti, hogy az adott tárban X és Y távolsága 1-nél nagyobb:

$$| \text{?- } \text{abs}(X-Y)\#>1 \#<=> B, X \text{ in } 1..4, Y \text{ in } 6..10. \\ \Rightarrow B = 1$$
- Bár a távolság-feltétel alább is fennáll, a rendszer nem veszi észre!

$$| \text{?- } \text{abs}(X-Y)\#>1 \#<=> B, X \text{ in } \{1,5\}, Y \text{ in } \{3,7\}. \\ \Rightarrow B \text{ in } 0..1$$
- Az aritmetika alaphelyzetben csak intervallum-konzisztenciát biztosít:

$$| \text{?- } \text{scalar_product}([1,-1],[X,Y],\#=,D), \quad \% \equiv D \# = X-Y, \\ AD \# = \text{abs}(D), AD\#>1 \#<=> B, \\ X \text{ in } \{1,5\}, Y \text{ in } \{3,7\}. \\ \Rightarrow D \text{ in } -6..2, AD \text{ in } 0..6, B \text{ in } 0..1$$

$$| \text{?- } \text{scalar_product}([1,-1],[X,Y],\#=,D, [\text{consistency}(\text{domain})]), \\ AD \# = \text{abs}(D), AD\#>1 \#<=> B, \\ X \text{ in } \{1,5\}, Y \text{ in } \{3,7\}. \\ \Rightarrow D \text{ in } \{-6,-2,2\}, AD \text{ in } \{2,6\}, B = 1$$

Korlátok levezethetősége

A levezethetőség (entailment) felderítésének szintjei

- Tartomány-levezethetőség (domain-entailment):
A C n -változós korlát **tartomány-levezethető** az s tárból, ha változóinak s -ben megengedett tetszőleges $V_j \in D(X_j, s)$ érték kombinációjára ($j = 1, \dots, n$), $C(V_1, \dots, V_n)$ fennáll.
- Intervallum-levezethetőség (interval-entailment):
 C intervallum-levezethető s -ből, ha minden $V_j \in D'(X_j, s)$ érték kombinációra ($j = 1, \dots, n$), $C(V_1, \dots, V_n)$ fennáll.

Megjegyzések

- Ha C intervallum-levezethető, akkor tartomány-levezethető is.
- A tartomány-levezethetőség vizsgálata általában bonyolultabb, mint az intervallum-levezethetősége. Például az $X \# \neq Y$ korlát:
 - tartomány-levezethető, ha X és Y tartományai diszjunktak (költsége: arányos a tartományok méretével);
 - intervallum-levezethető, ha X és Y tartományainak lefedő intervallumai diszjunktak (költsége: konstans).

Korlátok levezethetősége

A SICStus által garantált levezethetőségi szintek

- A tükrözött halmaz-korlátok kiderítik a tartomány-levezethetőséget.
- A tükrözött *lineáris* aritmetikai korlátok legalább az intervallum-levezethetőséget kiderítik.
- A `scalar_product/5` a `consistency(domain)` opcióval tartomány-levezethetőséget biztosít (minden lineáris korlátra).
- A tükrözött nem-lineáris aritmetikai korlátokra nincs garantált szint.

```
| ?- X in 1..4, X #< Y #<=> B, X+Y #=9.
   B = 1, X in 1..4, Y in 5..8 ?
| ?- X+Y #= Z #<=> B, X=1, Z=6, Y in 1..10, Y#\=5.
   X = 1, Z = 6, Y in (1..4)\(6..10), B in 0..1 ?
| ?- domain([X,Y,Z], 1, 10),
   scalar_product([1,1],[X,Y],#=#,Z,[consistency(domain)])#<=> B,
   X=1, Z=6, Y#\=5.
   B = 0, X = 1, Z = 6, Y in(1..4)\(6..10) ?
```

Mágikus sorozatok – tükrözéssel

```
magikus3(N, L) :-
    length(L, N),
    N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
    osszege(L, S), call(S #= N),
    szorzatosszege(L, 0, SS), call(SS #= N),
    elofordulasok3(L, 0, L),
    labeling([], L). % most már kell a címkézés!
```

```
% A korábbi elofordulasok/3 másolata
elofordulasok3([], _, _).
elofordulasok3([E|Ek], I, Sor) :-
    pontosan3(I, Sor, E),
    J is I+1, elofordulasok3(Ek, J, Sor).
```

```
% pontosan3(I, L, E): L-ben az I E-szer fordul elő.
pontosan3(_, [], 0).
pontosan3(I, [X|L], N) :-
    X #= I #<=> B, N #= N1+B, pontosan3(I, L, N1).
```

A mágikus sorozat megoldásainak összehasonlítása

Az összes megoldás előállítási ideje másodpercben, 1 perc időkorláttal, Pentium III, 600 MHz processzoron („—” = időtúllépés).

variáns/adat	n=10	n=20	n=40	n=80	n=160	n=320
választós	13.90	—	—	—	—	—
választós+osszege	0.22	—	—	—	—	—
vál.+szorzatosszege	0.02	0.55	44.04	—	—	—
vál.+ossz+szorzossz	0.02	0.29	17.98	—	—	—
tükrözéses	0.05	1.07	24.02	—	—	—
tükrözéses+osszege	0.01	0.14	1.71	20.15	—	—
tükr.+szorzatosszege	0.01	0.04	0.18	0.94	4.75	25.77
tükr.+ossz+szorzossz	0.01	0.05	0.19	0.95	4.61	23.57

Logikai korlátok

Logikai korlát argumentuma lehet

- egy B változó, B automatikusan a $0..1$ tartományra szűkül;
- egy tetszőleges tükrözhető aritmetikai- vagy halmazkorlát;
- egy tetszőleges logikai korlát.

A logikai korlátok (egyben függvényjelként is használhatók)

#\ Q	negáció	op(710, fy, #\).
P #/\ Q	konjunkció	op(720, yfx, #/\).
P #\ Q	kizáró vagy	op(730, yfx, #\).
P #\/ Q	diszjunkció	op(740, yfx, #\/).
P #=> Q	implikáció	op(750, xfy, #=>).
Q #<= P	implikáció	op(750, yfx, #<=).
P #<=> Q	ekvivalencia	op(760, yfx, #<=>).

A tükrözött és logikai korlátok kapcsolata

- A korábban bevezetett tükrözési jelölés ($C \Leftrightarrow B$) a fenti logikaikorlát-fogalom speciális esete.
- De: a ($C \Leftrightarrow B$) alakú *elemi* korlát az, amire a logikai korlátok visszavezethetők.
- Példa: $X\#>4 \ \#\ \backslash \ Y\#>6 \longrightarrow X\#>4\#\Leftrightarrow B1, Y\#>6\#\Leftrightarrow B2, B1+B2 \ \#\ > 0$
- **Vigyázat!** A diszjunktív logikai korlátok gyengén szűkítenek, pl. egy n-tagú diszjunktív csak akkor tud szűkíteni, ha egy kivételével valamennyi tagjának a negáltja levezethetővé válik (a példában ha $X\#\backslash=4$ vagy $Y\#\leq 6$ levezethető lesz).

Példa: lovagok, lóköttők és normálisak

Egy szigeten minden bennszülött lovag, lóköttő, vagy normális. A lovagok mindig igazat mondanak, a lóköttők mindig hazudnak, a normális emberek pedig néha hazudnak, néha igazat mondanak.

Kódolás: normális $\rightarrow 2$, lovag $\rightarrow 1$, lóköttő $\rightarrow 0$.

```
:- use_module(library(clpfd)).
:- op(700, fy, nem).      :- op(900, yfx, vagy).
:- op(800, yfx, és).      :- op(950, xfy, mondja).

% A B bennszülött mondhatja az Áll állítást.
B mondja Áll :- értéke(B mondja Áll, 1).

% értéke(A, Érték): Az A állítás igazságértéke Érték.
értéke(X = Y, E) :-
    X in 0..2, Y in 0..2, E #<=> (X #= Y).
értéke(X mondja M, E) :-
    X in 0..2, értéke(M, E0),
    E #<=> (X #= 2 #\ E0 #= X).
értéke(M1 és M2, E) :-
    értéke(M1, E1), értéke(M2, E2), E #<=> E1 #/\ E2.
értéke(M1 vagy M2, E) :-
    értéke(M1, E1), értéke(M2, E2), E #<=> E1 #\ E2.
értéke(nem M, E) :-
    értéke(M, E0), E #<=> #\E0.
```

Példa: lovagok, lóköttők és normálisak

```
% We are given three people, A, B, C, one of whom is
% a knight, one a knave, and one a normal (but not
% necessarily in that order). They make the following
% statements.           A: I am normal
%                       B: A is right
%                       C: I am not normal

% https://www.doverpublications.com/mathsci/0921/d/481980.pdf
% 39. feladat

| ?- all_different([A,B,C]), A mondja A = 2,
    B mondja A = 2, C mondja nem C = 2,
    labeling([], [A,B,C]).

    A = 0, B = 2, C = 1 ? ; no
```

Tartalom

- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
 - CSP, mint háttér
 - Alapvető korlátok
 - Tükrözött és logikai korlátok
 - **Kiegészítések és segédeszközök**
 - Címkézés
 - Felhasználó által definiált korlátok
 - Kombinatorikus korlátok
 - FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
 - CLPFD esettanulmányok

Formula-korlátok

- Formula-korlátnak hívjuk az operátoros jelöléssel írt korlátot, azaz az eddig ismerteket, kivéve a globális aritmetikai korlátokat.
- A formula-korlátokat a rendszer nem könyvtári eljárással valósítja meg, hanem a Prolog `goal_expansion/5` kampójának segítségével.
- A kampó-eljárás *fordítási időben* a formula-korlátot, egy `scalar_product/4` korlátra, és/vagy nem-publikus elemi korlátokra fejt ki.
- A formula-korlátok kifejtése `call/1`-be ágyazással elhalasztható a korlát *futási időben* való felvételéig.

A legfontosabb elemi korlátok a `clpfd` modulban

(SICStus 4.6.0 verzió)

- aritmetika: `'x+y=t'/3` `'x*y=z'/3` `'x/y=z'/3` `'x mod y=z'/3`
`'|x|=y'/2` `'max(x,y)=z'/3` `'min(x,y)=z'/3`
- összehasonlítás: `'x=y'/2` `'x<y'/2` `'x\\=y'/2`
és tükrözött változataik: `'xRy'` (X, Y, B), ahol $R \in \{ = < \backslash = \}$.
- halmaz-korlátok: `propagate_interval_chk(X, Min, Max)`
`prune_and_propagate(X, Halmaz)`
- logikai korlát: pl. `bool_and([B1, B2, ...], B)` jelentése: $B1 \#/\ B2 \#/\ \dots \# = B$, ahol B_i lehet X vagy $\#X$ alakú. További logikai korlátok: `bool_or`, `bool_xor`
- optimalizált speciális esetek:
`'x*x=y'/2` `'ax=t'/3` `'ax+y=t'/4` `'ax+by=t'/5`
`'t+u<c'/3` `'t=u+c'/3` `'t<u+c'/3` `'t\\=u+c'/3` `'t>=c'/2` stb.

Az elemi korlátok szűkítési szintje

- **Definíció:** A C korlát **pont-szűkítő**, ha minden olyan tár esetén tartomány-szűkítő, amelyben C változói, legfeljebb egy kivétellel be vannak helyettesítve.
Másképpen: ha minden ilyen tár esetén a korlát a behelyettesítetlen változót pontosan a C reláció által megengedett értékekre szűkíti.
- Az elemi korlátok többsége pont-szűkítő (kivétel: $X \bmod K \# = A$, amely csak akkor szűkít, ha X és K be van helyettesítve).

Korlátok kifejtése – példák

Emlékeztető:

```
M:goal_expansion(+Goal1, +Layout1, +Module, -Goal2, -Layout2)
```

```
| ?- use_module(library(clpfd)).
| ?- clpfd:goal_expansion(X*X+2*X+1 #= Y, _, _, G, _).
   G = clpfd:('x*x=y'(X, _A),
             scalar_product([1, -2, -1], [Y, X, _A], #=, 1)) ?

| ?- clpfd:goal_expansion((X+1)*(X+1) #= Y, _, _, G, _).
   G = clpfd:('t=u+c'(_A, X, 1), 'x*x=y'(_A, Y)) ?

| ?- clpfd:goal_expansion(abs(X-Y)#>1, _, _, G, _).
   G = clpfd:('x+y=t'(Y, _A, X),
             '|x|=y'(_A, _B), 't>=c'(_B, 2)) ?

| ?- clpfd:goal_expansion(X#=4 #/\ Y#>6, _, _, G, _).
   G = (clpfd:'x=y'(X, 4, _A),
        clpfd:'x<y'(7, Y, _B),
        clpfd:bool_or([_A, _B], 1)) ?
```


Korlátok kifejtése – további példák

```
| ?- clpfd:goal_expansion(#\ X #/\ Y #/\ Z, _, _, G, _).
   G = (clpfd:bool_and([#\X,Y],_A), clpfd:bool_or([_A,Z],1)) ?

| ?- clpfd:goal_expansion((J+K)*2+L+3*M-(J+9) #= Z,_, _, G, _).
   G = clpfd:scalar_product([1,2,1,3,-1],[J,K,L,M,Z],#=#,9) ?

| ?- clpfd:goal_expansion(X*X*X*X #= 16, _, _, G, _).
   G = clpfd('x*x=y'(X,_A), 'x*y=z'(_A,X,_B), 'x*y=z'(_B,X,16)) ?

| ?- clpfd:goal_expansion(X*X*(X*X) #= 16, _, _, G, _).
   G = clpfd('x*x=y'(X,_A), 'x*x=y'(_A,16)) ?

| ?- clpfd:goal_expansion(X in {1,2}, _, _, G, _).
   G = clpfd:propagate_interval_chk(X,1,2) ?
```

Megjegyzések

- Lineáris korlátoknál a kifejtés megőrzi a pont- és intervallum-szűkítést.
- Általános esetben a kifejtés még a pont-szűkítést sem őrzi meg, pl
| ?- X in 0..10, X*X*X*X#=16. → X in 1..4

CLPFD segédeljárások – válaszok formája

- Alaphelyzet: a rendszer egy kérdésre való válaszoláskor csak a kérdésben előforduló változók tartományát írja ki, az alvó korlátokat nem.
- Ha a `clpfd:full_answer` dinamikus kampó (callback) eljárás sikeresen fut le – lásd `assert(...)` – akkor a kérdésbeli változók mellett kiírja még a le nem futott összes korlátot, és azok változóit is.

```
| ?- domain([X,Y], 1, 10), Y#=5-X.           => X in 1..4, Y in 1..4 ?
| ?- assert(clpfd:full_answer).              => yes
| ?- domain([X,Y], 1, 10), Y#=5-X.           => X+Y#=5, X in 1..4, Y in 1..4 ?
| ?- X #> 0, X*X*X*X #= 16.                  =>
      X*X#=_A, _A*X#=_B, _B*X#=16,
      X in 1..4, _A in 1..16, _B in 4..16 ?
| ?- domain([X,Y,Z], 1, 5), X+Y#=Z#<=>B. =>
      Z#=_A#<=>B, X+Y#=_A,
      X in 1..5, Y in 1..5, Z in 1..5, _A in 2..10, B in 0..1 ?
| ?- retract(clpfd:full_answer).             % kitörli az adott klózt, a kampó meghíúsul
| ?- domain([X,Y,Z], 1, 5), X+Y#=Z#<=>B. =>
      X in 1..5, Y in 1..5, Z in 1..5, B in 0..1 ?
```

CLPFD segédeljárások – FD változók

- Az FD változókról a könyvtár által tárolt információk lekérdezhetők.
- Ezek felhasználhatók a címkézésben, globális korlátok írásában ill. nyomkövetésben.
- **Vigyázat!** Félreértés veszélye! Minden más használat hibás!
- `fd_var(V)`: V egy korlát-változó. (Azaz V legalább egy korlátban előfordul, és ezáltal tartománnyal rendelkezik.)
- `fd_min(X, Min)`: A Min paramétert egyesíti az X változó tartományának alsó határával (ez egy egész vagy inf lehet).
- `fd_max(X, Max)`: Max az X felső határa (egész vagy sup).
- `fd_size(X, Size)`: Size az X tartományának mérete (egész vagy sup).
- `fd_dom(X, Range)`: Range az X változó tartománya, *KonstansTartomány* formában.
- `fd_set(X, Set)`: Set az X tartománya ún. FD-halmaz formában.
- `fd_degree(X, D)`: D az X-hez kapcsolódó korlátok száma.

CLPFD segédeljárások – FD változók

Példák

```
| ?- X in (1..5)\/{9}, fd_min(X, Min), fd_max(X, Max),
      fd_size(X, Size).
      Min = 1, Max = 9, Size = 6, X in(1..5)\/{9} ?

| ?- X in (1..9)/\ \{6..8}, fd_dom(X, Dom), fd_set(X, Set).
      Dom = (1..5)\/{9}, Set = [[1|5],[9|9]], X in ... ?

| ?- queens_nolab(8, [X|_]), fd_degree(X, Deg).
      Deg = 21, X in 1..8 ?           % 21 = 7*3
```

FD-halmazok

- Az FD-halmaz formátum a tartományok belső ábrázolási formája.
 - **Absztrakt adattípus**ként használandó, alapműveletei:
 - `is_fdset(S)`: S egy korrekt FD-halmaz.
 - `empty_fdset(S)`: S az üres FD-halmaz. (S lehet változó)
 - `fdset_parts(S, Min, Max, Rest)`: Az S FD-halmaz áll egy `Min..Max` kezdő intervallumból és egy `Rest` maradék FD-halmazból, ahol `Rest` minden eleme határozottan nagyobb `Max+1`-nél. Egyaránt használható FD-halmaz szétszedésére és építésére.
- ```
| ?- X in (1..9) /\ \{6..8}, fd_set(X, _S),
 fdset_parts(_S, Min1, Max1, _S1),
 fdset_parts(_S1, Min2, Max2, S2).

 Min1 = 1, Max1 = 5,
 Min2 = 9, Max2 = 9,
 S2 = [],
 X in (1..5)\/{9} ?
```

## FD-halmazok

- Az FD-halmaz tényleges ábrázolása: `[Alsó|Felső]` alakú szeparált zárt intervallumok rendezett listája. (A `'(,_)'` struktúra memóriaigénye 33%-kal kevesebb mint bármely más `'f(,_)'` struktúráé.)
- ```
| ?- X in (1..9) /\ \{6..8}, fd_set(X, S).
    S = [[1|5], [9|9]],
    X in (1..5)\/{9} ?
```
- FD-halmaz is használató szűkítésre:
 - `X in_set Set`: Az X változót a Set FD-halmazzal szűkíti.
 - **Vigyázat!** Ha a korlát-felvételi fázisban egy változó tartományát egy másik tartományának függvényében szűkítjük, ezzel nem érhetünk el „démoni” szűkítő hatást, hiszen ez a szűkítés csak *egyszer* fut le. Az `in_set` eljárást csak globális korlátok ill. testreszabott címkézés megvalósítására célszerű használni.

FD-halmazokat kezelő eljárások

- `fdset_singleton(Set, Elt)`: Set az egyetlen Elt-ből áll.
- `fdset_interval(Set, Min, Max)`: Set a `Min..Max` intervallum (oda-vissza használható).
- `empty_interval(Min, Max)`: `Min..Max` egy üres intervallum. Ekvivalens a `+fdset_interval(_, Min, Max)` hívással.
- `fdset_union(Set1, Set2, Union)`: Set1 és Set2 úniója Union.
`fdset_union(ListOfSets, Union)`: a ListOfSets lista elemeinek úniója Union.
- `fdset_intersection/[3,2]`: Két halmaz ill. egy listában megadott halmazok metszete.
- `fdset_complement/2`: Egy halmaz komplementje.
- `fdset_member(Elt, Set)`: Elt eleme a Set FD-halmaznak.
- `list_to_fdset(List, Set)`, `fdset_to_list(Set, List)`: Számlista átalakítása halmazzá és fordítva.
- `range_to_fdset(Range, Set)`, `fdset_to_range(Set, Range)`: Konstans tartomány átalakítása halmazzá és viszont.

FD-halmazokat kezelő eljárások

Példa

```
| ?- list_to_fdset([2,3,5,7], _FS1),
    fdset_complement(_FS1, _FS2),
    % _FS2 ↔ \{2,3,5,7}
    fdset_interval(_FS3, 0, sup),
    % _FS3 ↔ 0..sup
    fdset_intersection(_FS2, _FS3, FS),
    % FS ↔ (0..sup)\ \{2,3,5,7}
    fdset_to_range(FS, Range),
    X in_set FS.
```

```
FS = [[0|1], [4|4], [6|6], [8|sup]],
Range = (0..1)\/{4}\/{6}\/(8..sup),
X in (0..1)\/{4}\/{6}\/(8..sup) ?
```

5 A SICStus clp(FD) könyvtára

- CSP, mint háttér
- Alapvető korlátok
- Tükrözött és logikai korlátok
- Kiegészítések és segédeszközök
- **Címkézés**
- Felhasználó által definiált korlátok
- Kombinatorikus korlátok
- FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
- CLPFD esettanulmányok

CSP programok szerkezete (*ismétlés!*)

- változók és tartományaik megadása,
- korlátok felvétele (lehetőleg választási pontok létrehozása nélkül),
- címkézés (keresés).

A címkézési fázis feladata

- Adott változók egy halmaza,
- ezeket a tartományaik által megengedett értékekre szisztematikusan be kell helyettesíteni
- (miközben a korlátok fel-felébrednek, és visszalépést okoznak a nem megengedett állapotokban).
- Mindezt a lehető leggyorsabban, a lehető legkevesebb visszalépéssel kell megoldani.

A keresés célja lehet

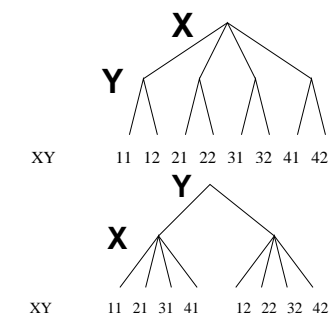
- **egyetlen** (tetszőleges) megoldás előállítása,
- az **összes** megoldás előállítása,
- a valamilyen szempontból **legjobb** megoldás előállítása.

A keresési stratégia paraméterezési lehetőségei

- Milyen **sorrendben** kezeljük az egyes változókat?
- Milyen **választási pontot** hozunk létre?
- Milyen **irányban** járjuk be a változó tartományát?

Hogyan függ a keresési tér a változó-sorrendtől?

- $| \text{?- } X \text{ in } 1..4, Y \text{ in } 1..2, \text{indomain}(X), \text{indomain}(Y).$
- $| \text{?- } X \text{ in } 1..4, Y \text{ in } 1..2, \text{indomain}(Y), \text{indomain}(X).$

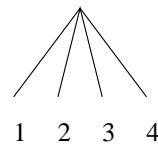


- A **first-fail** elv: a kisebb tartományú változót előbb címkézzük — kevesebb választási pont, remélhetően kisebb keresési tér.
- Példa feladatspecifikus sorrendre: az N vezér feladatban érdemes a középső sorokba tenni le először a vezéreket, mert ezek a többi változó tartományát jobban megsűrík, mint a szélsőkbe tették.

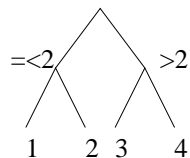
Keresési stratégiák – példák

Milyen szerkezetű keresési tereket hozhatunk létre?

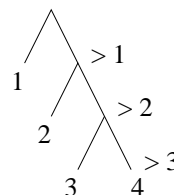
- felsorolás: `| ?- X in 1..4, labeling([enum], [X]).`



- kettévágás: `| ?- X in 1..4, labeling([bisect], [X]).`



- lépegetés: `| ?- X in 1..4, labeling([step], [X]).`



Címkező eljárások

A címkézés alap-eljárása: `labeling(Opciók, VáltozóLista)`

A `VáltozóLista` minden elemét minden lehetséges módon behelyettesíti, az `Opciók` lista által előírt módon. Az alábbi csoportok mindegyikéből legfeljebb egy opció szerepelhet.

- 1 a változó kiválasztása: `leftmost`, `min`, `max`, `ff`, `ffc`, `variable(Sel)`
- 2 a választási pont fajtája: `step`, `enum`, `bisect`, `value(Enum)`
- 3 a bejárési irány: `up`, `down`
- 4 a keresett megoldások: `all`, `minimize(X)`, `maximize(X)`
- 5 a gyűjtendő statisztikai adat: `assumptions(K)`
- 6 a balszélső ágtól való eltérés korlátozása: `discrepancy(D)`
- 7 időkorlát: `time_out(MSec, Result)`

1-4 esetén *dőlt szedés* jelzi az alapértelmezést.

Hibát jelez, ha a `VáltozóLista`-ban van nem korlátos tartományú változó.

Speciális címkézési eljárás: `indomain(X)`

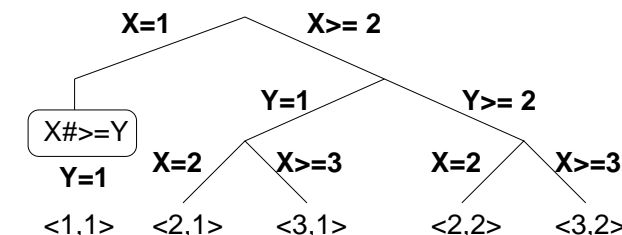
Ekvivalens a `labeling([enum], [X])` hívással.

A címkézés menete

- Ha a változólista üres, akkor a címkézés sikeresen véget ér. Egyébként kiválasztunk belőle egy `X` elemet az 1. csoportbeli opció szerint.
- Ha `X` behelyettesített, akkor a változólistából elhagyjuk, és az **a.** pontra megyünk.
- Egyébként az `X` változó tartományát felosztjuk két vagy több diszjunkt részre a 2. csoportbeli opció szerint (kivéve `value(Enum)` esetén, amikor is azonnal az **f.** pontra megyünk).
- A tartományokat elrendezzük a 3. csoportbeli opció szerint.
- Létrehozunk egy választási pontot, amelynek ágain sorra leszűkítjük az `X` változót a kiválasztott tartományokra.
- Minden egyes ágon az `X` szűkítése értelemszerűen kiváltja a rá vonatkozó korlátok felébredését. Ha ez meghiúsulást okoz, akkor visszalépünk az **e.** pontra és ott a következő ágon folytatjuk.
- Ha `X` most már behelyettesített, akkor elhagyjuk a változólistából. Ezután mindenképpen folytatjuk az **a.** pontnál.
- Eközben értelemszerűen követjük a 4.-7. csoportbeli opciók előírásait is.

A címkézés menete – példa

- A példa:
`X in 1..3, Y in 1..2, X#>=Y, labeling([min], [X,Y]).`
- A `min` opció a legkisebb alsó határú változó kiválasztását írja elő.
- A keresési fa:



A címkézés menete – példa

```
| ?- fdbg_assign_name(X, x), fdbg_assign_name(Y, y),
      X in 1..3, Y in 1..2, X #>= Y, fdbg_on, labeling([min], [X,Y]).
% The clp(fd) debugger is switched on
Labeling [1, <x>]: starting in range 1..3.
Labeling [1, <x>]: step: <x> = 1
  <y>#=<1      y = 1..2 -> {1} Constraint exited.
                                     X = 1, Y = 1 ? ;
Labeling [1, <x>]: step: <x> >= 2
  <y>#=<<x>    y = 1..2, x = 2..3 Constraint exited.
Labeling [6, <y>]: starting in range 1..2.
Labeling [6, <y>]: step: <y> = 1
  Labeling [8, <x>]: starting in range 2..3.
  Labeling [8, <x>]: step: <x> = 2
                                     X = 2, Y = 1 ? ;
  Labeling [8, <x>]: step: <x> >= 3
                                     X = 3, Y = 1 ? ;
  Labeling [8, <x>]: failed.
Labeling [6, <y>]: step: <y> >= 2
  Labeling [12, <x>]: starting in range 2..3.
  Labeling [12, <x>]: step: <x> = 2
                                     X = 2, Y = 2 ? ;
  Labeling [12, <x>]: step: <x> >= 3
                                     X = 3, Y = 2 ? ;
  Labeling [12, <x>]: failed.
Labeling [6, <y>]: failed.
Labeling [1, <x>]: failed.
```

Címkézési opciók

A címkézendő változó

A következő címkézendő változó kiválasztási szempontjai (ahol több szempont van, a későbbi csak akkor számít, ha a megelőző szempont(ok) szerint több azonos értékű van):

- `leftmost` (alapértelmezés) — legbaloldalibb;
- `min` — a legkisebb alsó határú; ha több ilyen van, közülük a legbaloldalibb;
- `max` — a legnagyobb felső határú; a legbaloldalibb;
- `ff` — („first-fail” elv): a legkisebb tartományú (vö. `fd_size`); a legbaloldalibb;
- `ffc` — a legkisebb tartományú; a legtöbb korlátban előforduló (vö. `fd_degree`); a legbaloldalibb;
- `variable(Se1)` — (meta-opció) `Se1` egy felhasználói eljárás, amely kiválasztja a következő címkézendő változót (lásd 216. oldal).

Címkézési opciók

A választás fajtája

A kiválasztott X változó tartományát a következőképpen bonthatjuk fel:

- `step` (alapértelmezés) — $X \# = B$ és $X \# \setminus = B$ közötti választás, ahol B az X tartományának alsó vagy felső határa (a bejárési iránytól függően);
- `enum` — többszörös választás X lehetséges értékei közül;
- `bisect` — $X \# = < M$ és $X \# > M$ közötti választás, ahol M az X tartományának középső eleme ($M = (\min(X) + \max(X)) // 2$);
- `value(Enum)` — (meta-opció) `Enum` egy eljárás, amelynek az a feladata, hogy leszűkítse X tartományát (lásd 218. oldal).

A bejárési irány

A tartomány bejárési iránya lehet:

- `up` (alapértelmezés) — alulról felfelé;
- `down` — felülről lefelé.

Címkézési opciók

A keresett megoldások

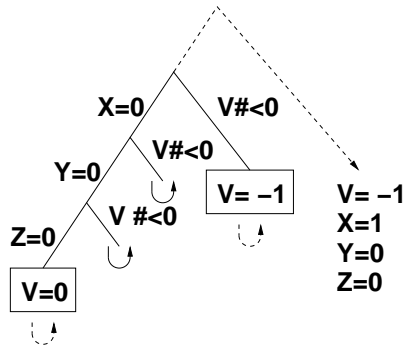
- `all` (alapértelmezés) — visszalépéssel az összes megoldást felsorolja;
- `minimize(X)` ill. `maximize(X)` — egy, az X -re minimális ill. maximális értéket eredményező megoldást keres, branch-and-bound algoritmussal.

Példa szélsőérték keresésére

```
| ?- _L=[X,Y,Z], domain(_L, 0, 1),
      V #= Y+Z-X, labeling([minimize(V)], _L).
```

```
V = -1, X = 1, Y = 0, Z = 0 ? ;
no
```

A keresési fa a branch-and-bound algoritmussal



További címkézési opciók

- **Statistika:** `assumptions(K)` — egyesíti K -t a sikeres megoldáshoz vezető ágon levő változó-kiválasztások számával (ami lényegében a keresési fában a megoldáshoz vezető út hossza).
- **A heurisztikától való eltérés korlátozása:** `discrepancy(D)` (D adott szám) — csak olyan megoldásokat kérünk figyelembe venni, amelyekhez a keresési fában úgy jutunk el, hogy legfeljebb D -szer választunk nem legbaloldalibb ágat a választási pontokban. (Szemléletesen: a fa gyökerétől a megoldásig haladva legfeljebb D -szer kell megadni a jobbkez-szabály szerinti elsőbbséget.)
Az opció háttere az LDS (Limited Discrepancy Search) keresési módszer. Ebben feltételezzük, hogy a legbaloldalibb választások képviselik azt a heurisztikát, amivel nagy valószínűséggel eljuthatunk egy megoldáshoz. Mivel a heurisztika nem teljesen tökéletes, ezért valamennyi eltérést megengedünk, de az össz-eltérés-mennyiséget korlátozzuk.
- **Időkorlát:** `time_out(MSec,Result)`. Ha M Sec milliszekundum alatt lefut, `Result = success`, egyébként leövi a címkézést és `Result = time_out`. A `minimize/maximize` opciókkal jól működik együtt (ezek az opciók az addigi legjobb eredményt adják vissza).

Címkézési példák (vö. a 205. oldalon levő keresési fákkal)

```
assumptions(Select, As) :-
    X in 1..4,
    findall(A, labeling([Select, assumptions(A)], [X]), As).
```

```
| ?- assumptions(enum, As).           As = [1,1,1,1]
| ?- assumptions(bisect, As).         As = [2,2,2,2]
| ?- assumptions(step, As).           As = [1,2,3,3]
```

```
lds(Select, D, Xs) :-
    X in 1..4,
    findall(X, labeling([Select, discrepancy(D)], [X]), Xs).
```

```
| ?- lds(enum, 1, Xs).                 Xs = [1,2,3,4]
| ?- lds(bisect, 1, Xs).                Xs = [1,2,3]
| ?- lds(step, 1, Xs).                  Xs = [1,2]
```

A címkézés testreszabása

`labeling/2` — a `variable(Sel)` meta-opció

- `variable(Sel)` — Sel egy eljárás, amely kiválasztja a következő címkézendő változót. $Sel(Vars, Selected, Rest)$ alakban hívja meg a rendszert, ahol $Vars$ a még címkézendő változók/számok listája.
- Sel -nek determinisztikusan sikerülnie kell egyesítve $Selected$ -et a címkézendő *változóval* és $Rest$ -et a maradékkal.
- Sel egy tetszőleges meghívható kifejezés lehet (`callable`, azaz név vagy struktúra). A három argumentumot a rendszer fűzi Sel argumentumlistájának végére.
- Például: ha a Sel opcióként a `mod:sel(Param)` kifejezést adjuk meg, akkor a rendszer a `mod:sel(Param, Vars, Selected, Rest)` eljáráshívást hajtja majd végre.

A címkézés testreszabása

Példa a variable opció használatára

```
% A Vars-beli változók között Sel a Hol-"adik" (0 =< Hol <1),
% Rest a maradék.
valaszt(Hol, Vars, Sel, Rest) :-
    szur(Vars, Szurtek),
    length(Szurtek, Len), N is integer(Hol*Len),
    nth0(N, Szurtek, Sel, Rest).

% szur(Vk, SzVk): A Vk listában levő változók listája SzVk.
szur([], []).
szur([V|Vk], SzVk) :- nonvar(V), !, szur(Vk, SzVk).
szur([V|Vk], [V|SzVk]) :- szur(Vk, SzVk).

queens([], 8, Qs).           → Qs = [1,5,8,6,3,7,2,4]
queens([variable(valaszt(0.5))], 8, Qs)
                             → Qs = [7,2,6,3,1,4,8,5]
queens([variable(valaszt(0.7))], 8, Qs)
                             → Qs = [5,7,2,6,3,1,4,8]
```

A címkézés testreszabása

Példa: középről kifelé való érték-felsorolás

```
midout(X, _Rest, BB0, BB) :-
    fd_size(X, Size),
    Mid is (Size+1)//2,
    fd_set(X, Set),
    fdset_to_list(Set, L),
    nth1(Mid, L, MidElem),
    ( first_bound(BB0, BB), X = MidElem
    ; later_bound(BB0, BB), X #\= MidElem
    ).

| ?- X in {1,3,12,19,120},
    labeling([value(midout)], [X]).
X = 12 ? ;
X = 3 ? ;
X = 19 ? ;
X = 1 ? ;
X = 120 ? ; no
```

A címkézés testreszabása

labeling/2 — a value(Enum) meta-opció

- value(Enum) — Enum egy eljárás, amely egy X változó tartományának szűkítését végzi. Az eljárást a rendszer Enum(X, Rest, BB0, BB) alakban hívja meg, ahol [X|Rest] a még címkézendő változók listája.
- Enum-nak nemdeterminisztikusan le kell szűkítenie X tartományát az összes lehetséges módon, vö. a címkézés menetének leírását a 207. oldalon. (A value opció a **c.**, **d.** és **e.** lépések együttesét váltja ki.)
- Az első választásnál meg kell hívnia a first_bound(BB0, BB), a későbbieknél a later_bound(BB0, BB) eljárást, a BB ill. LDS keresési algoritmusok kiszolgálására.
- Enum-nak egy meghívható kifejezésnek kell lennie. A négy argumentumot a rendszer fűzi Enum argumentumlistájának a végére.

A címkézés hatékonysága

A korábbi queens eljárás megoldásai 600 MHz Pentium III gépen.

Összes megoldás keresése

méret	n=8		n=10		n=12	
megoldások száma	92		724		14200	
címkézés	sec	btrk	sec	btrk	sec	btrk
[step]	0.07	324	1.06	5942	25.39	131K
[enum]	0.07	324	1.03	5942	24.84	131K
[bisect]	0.07	324	1.07	5942	26.04	131K
[enum,min]	0.08	462	1.31	8397	33.89	202K
[enum,max]	0.07	462	1.31	8397	33.89	202K
[enum,ff]	0.06	292	0.97	4992	21.57	101K
[enum,ffc]	0.06	292	1.04	4992	23.24	101K
[enum, midvar ¹] ²	0.06	286	0.90	4560	20.11	88K

¹ midvar ≡ variable(valaszt(0.5)).

²Hatékonyabb statikusan (a címkézés előtt egyszer) elrendezni a változókat és az értékeket, lásd az alt_queens/2 eljárást a library('clpfd/examples/queens') állományban.

A címkézés hatékonysága

Első megoldás keresése

méret	n=16		n=18		n=20	
	sec	btrk	sec	btrk	sec	btrk
[enum]	0.43	1833	1.76	7436	9.01	37320
[enum,min]	0.52	2095	0.87	2595	1.39	3559
[enum,max]	0.61	3182	2.68	13917	16.06	83374
[enum,ff]	0.03	7	0.05	11	0.08	33
[enum,ffc]	0.03	7	0.05	11	0.09	33
[enum, <i>midvar</i> ¹] ²	0.04	69	0.06	57	0.15	461
[value(midout) ²]	0.04	3	0.05	4	0.09	38
[value(midout) ² ,ffc]	0.04	15	0.06	41	0.08	20

¹ *midvar* \equiv variable(valaszt(0.5)).

² Hatékonyabb statikusan (a címkézés előtt egyszer) elrendezni a változókat és az értékeket, lásd az `alt_queens/2` eljárást a `library('clpfd/examples/queens')` állományban.

Szélsőértékek ismételt hívással való előállítás

`minimize(Cél, X)` ill. `maximize(Cél, X)`

A *Cél ismételt hívásával* megkeresi az *X* változó minimális ill. maximális értékét.

A `minimize/2` eljárás egy „saját” megvalósítása

```
my_minimize(Goal, Var) :-
    findall(Goal-Var, (Goal -> true), [Best1-UB1]),
    minimize(Goal, Var, Best1, UB1).
```

```
% minimize(Goal, Var, BestSoFar, UB): Var is the minimal value < UB
% allowed by Goal, or, failing that, Goal = BestSoFar and Var = UB.
minimize(Goal, Var, _, UB) :- var(UB), !, error.
```

```
% Goal does not instantiate Var
```

```
minimize(Goal, Var, _, UB) :-
    call(Var #< UB), % csak a nyomkövetés kedvéért
    findall(Goal-Var, (Goal -> true), [Best1-UB1]), !,
    minimize(Goal, Var, Best1, UB1).
```

```
minimize(Goal, Var, Goal, Var).
```

Szélsőértékek ismételt hívással való előállítás

Kiegészítések az előző diához:

- `findall(Cél, (Cél->true), [EM])`: EM a Cél első megoldásának másolata.
- A keresési fa szerkezetétől függ, hogy a `minimize/2` vagy a `labeling([minimize...],...)` a hatékonyabb. Pl. a `minimize/2` a 213. oldalon levő fában elkerüli az *X, Y*-hoz tartozó választási pontok bejárását.

Szélsőértékek ismételt hívással való előállítás

Példa a `my_minimize/2` használatára

```
p(L, V) :- L = [X,Y,Z], domain(L, 0, 1), V #= Y+Z-X.
```

```
| ?- spy [call/1,minimize/4,labeling/2].
| ?- p(L, V), my_minimize(labeling([], L), V).
+ 1 1 Call: lblg(user:[], [X,Y,Z]) ? z
?+ 1 1 Exit: lblg(user:[], [0,0,0]) ? z
+ 2 1 Call: minimize(lblg([], [X,Y,Z]), V, lblg([], [0,0,0]), 0) ? z
+ 3 2 Call: call(user:(V#<0)) ? z
+ 3 2 Exit: call(user:(-1#<0)) ? z
+ 4 2 Call: lblg(user:[], [1,0,0]) ? z
+ 4 2 Exit: lblg(user:[], [1,0,0]) ? z
+ 5 2 Call: minimize(lblg([], [1,0,0]), -1, lblg([], [1,0,0]), -1) ? z
+ 6 3 Call: call(user:(-1#<-1)) ? z
+ 6 3 Fail: call(user:(-1#<-1)) ? z
+ 5 2 Exit: minimize(lblg([], [1,0,0]), -1, lblg([], [1,0,0]), -1) ? z
+ 2 1 Exit: minimize(lblg([], [1,0,0]), -1, lblg([], [0,0,0]), 0) ? z
L = [1,0,0], V = -1 ?
```


- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
 - CSP, mint háttér
 - Alapvető korlátok
 - Tükrözött és logikai korlátok
 - Kiegészítések és segédeszközök
 - Címkézés
 - Felhasználó által definiált korlátok
 - Kombinatorikus korlátok
 - FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
 - CLPFD esettanulmányok

Mit kell meghatározni egy új korlát definiálásakor?

- Az **aktiválás** feltételei: mikor szűkítsen (melyik változó milyen jellegű tartomány-változásakor)?
- A **szűkítés** módja: hogyan szűkítse egyes változóit a többi tartományának függvényében?
- A **befejezés** feltétele: mikor fejezheti be a működését (mikor válik levezethetővé)?
- ha reifikálni is akarjuk:
 - hogyan kell végrehajtani a negáltját (aktiválás, szűkítés, befejezés)?
 - hogyan döntsük el a tárból való levezethetőségét?
 - hogyan döntsük el a negáltjának a levezethetőségét?

Felhasználói korlátok

Korlát-definiálási lehetőségek SICStusban

- Globális korlátok: tetszőleges (nem korlátos) számú változót tartalmazó korlátok definiálására használhatóak. Prolog kódként lehet teljesen általánosan megadni a korlátok működését (aktiválás, szűkítés, befejezés). A reifikálás külön nem támogatott.
- FD predikátumok: rögzített számú változót tartalmazó korlátok definiálására használhatóak. Reifikálható korlátok is definiálhatók. A programozó ún. indexikálisok segítségével írhatja le a szűkítési és levezethetőségi szabályokat. Az indexikálisok nyelve egy speciális, halmazértékű funkcionális nyelv a tartományokkal való műveletek végzésére. Példa:


```
% Az X+Y #= T korlát (intervallum szűkítéssel)
'x+y=t'(X,Y,T) +:
    X in min(T)-max(Y) .. max(T)-min(Y),
    Y in min(T)-max(X) .. max(T)-min(X),
    T in min(X)+min(Y) .. max(X)+max(Y).
```
- A CLPFD könyvtárbeli korlátok mindegyike vagy globális korlátként definiált, vagy FD-predikátum-hívásokra fejtődik ki.

Globális korlátok – egy egyszerű példa

$X \# \leq Y$ megvalósítása az `lseq(X, Y)` globális korláttal:

```
lseq(X, Y) :-
    fd_global(lseq(X,Y), void, [min(X),max(Y)]).
% az lseq(X,Y) globális démon elindul, kezdőállapot: void.
% Ébresztés: X alsó és Y felső határának változásakor.

:- discontinuous clpfd:dispatch_global/4.
% A d_g/4 predikátum klózái nem folytonosan is jöhetnek.
:- multifile clpfd:dispatch_global/4.
% A klózok több file-ből is jöhetnek.
clpfd:dispatch_global(lseq(X,Y), St, St, Actions) :-
    fd_min(X, MinX), fd_max(X, MaxX), % elkérjük X és Y alsó és felső
    fd_min(Y, MinY), fd_max(Y, MaxY), % határait (inf és sup is lehet!)
    ( integer(MaxX), integer(MinY), % inf és sup kizárására
      MaxX #<= MinY % ha max X #<= min Y
    -> Actions = [exit] % a korlát befejeződik (kilép)
    ; % egyébként
      Actions = [X in inf..MaxY, % X legfeljebb Y maximuma
                Y in MinX..sup] % Y legalább X minimuma
    ).
```

Globális korlátok – a korlát elindítása

- A globális korlátot egy közönséges Prolog eljárásaként kell megírni, ezen belül az `fd_global/3,4` eljárások meghívásával indítható el a korlát végrehajtása.
- `fd_global(Constraint, State, Susp[, Opts])`: `Constraint` végrehajtásának elindítása, `State` kezdőállapottal, `Susp` ébresztési listával. Itt `Constraint` a korlátot azonosító Prolog kifejezés, célszerűen megegyezik a korlátot definiáló Prolog eljárás fejével (pl. mert ezt a kifejezést mutatja a rendszer a le nem futott démonok megjelenítésénél, vö. `clpfd:full_answer` – újabban ez felülbíráható a `source` opcióval).
- A CLP(FD) könyvtár gondoskodik arról, hogy a korlát ébresztései között megőrizzen egy ún. állapotot, amely egy tetszőleges **nem-változó** Prolog kifejezés lehet. Az állapot kezdőértéke az `fd_global` eljárás második paramétere.
- Az `Opts` lista lehetséges elemei:
 - `source(Term)` – a korlát megjelenítendő alakja
 - `idempotent(Bool)` – ld. később

Globális korlátok – a korlát aktiválása

- Az `fd_global/3` meghívásakor és minden ébredéskor a rendszer elvégzi a felhasználó által meghatározott szűkítéseket. Ehhez a felhasználónak a `clpfd:dispatch_global/4` többállományos (`multifile`) kampó-eljárás egy megfelelő klózáat kell definiálnia.
- `clpfd:dispatch_global(Constraint, State0, State, Actions)`: A kampó-eljárás törzse definiálja a `Constraint` kifejezés által azonosított korlát felébredésekor elvégzendő teendőket. A `State0` paraméterben kapja a régi, a `State` paraméterben kell kiadnia az új állapotot. Az `Actions` paraméterben kell kiadnia a korlát által elvégzendő szűkítéseket (a korlát törzsében **tilos** szűkítéseket végezni). Ugyanitt kell jelezni a (sikeres vagy sikertelen) lefutást is. Alaphelyzetben a korlát újra elalszik.
- Az `Actions` lista elemei a következők lehetnek (a sorrend érdektelen):
 - `exit` ill. `fail` — a korlát sikeresen ill. sikertelenül lefutott,
 - `X=V, X in R, X in_set S` — az adott szűkítést kérjük végrehajtani (ez is okozhat meghíúsulást),
 - `call(Module:Goal)` — az adott hívást kérjük végrehajtani. A `Module`: modul-kvalifikáció kötelező!

Globális korlátok – a korlát elindítása, folyt.

- Példa (ismétlés):


```
% X #=< Y, globális korlátként megvalósítva.
lseq(X, Y) :-
    % lseq(X,Y) globális démon indul, kezdőállapot: void.
    % Ébredés: X alsó és Y felső határának változásakor.
    fd_global(lseq(X,Y), void, [min(X),max(Y)]).
```
- A korlát indításakor az `fd_global` harmadik paraméterében meg kell adni egy ébresztési listát, amely előírja, hogy mely változók milyen tartomány-változásakor kell felébreszteni a korlátot. A lista elemei a következők lehetnek:
 - `dom(X)` — az `X` változó tartományának bármely változásakor;
 - `min(X)` — az `X` változó alsó határának változásakor;
 - `max(X)` — az `X` változó felső határának változásakor;
 - `minmax(X)` — az `X` változó alsó vagy felső határának változásakor;
 - `val(X)` — az `X` változó behelyettesítésekor.
- A korlát nem tudja majd, hogy melyik változójának milyen változása miatt ébresztik fel. Ha több változás van, akkor is csak egyszer ébreszti fel a rendszer. Emiatt fontos, hogy minden lehetséges tartomány-változásra reagáljon a korlát.

Globális korlátok – a korlát aktiválása, folyt.

- A régebbi SICStus változatokban a `dispatch_global` eljárás (mint minden `multifile` eljárás) interpretáltan futott, ezért célszerű volt a `dispatch_global` klózok törzsében elvégzendő feladatokat egy külön eljárásaként beprogramozni. Erre ma már nincs szükség.

lseq példa — folytatás

```
:- discontinuous clpfd:dispatch_global/4. % nem folytonos eljárás
:- multifile clpfd:dispatch_global/4. % több fájlból is jöhet
clpfd:dispatch_global(lseq(X,Y), St, St, Actions) :-
    fd_min(X, MinX), fd_max(X, MaxX),
    fd_min(Y, MinY), fd_max(Y, MaxY),
    ( number(MaxX), number(MinY), MaxX <= MinY
      % buzgóbb mint X#=<Y, mert az csak X vagy Y
      % behelyettesítésekor fut le.
    -> Actions = [exit]
    ; Actions = [X in inf..MaxY, Y in MinX..sup]
    ).
```

További példa globális korlátra: $s = \text{sign}(x)$

```
% X előjele S, globális korlátként megvalósítva.
sign(X, S) :-
    S in -1..1,
    fd_global(sign(X,S), void, [minmax(X),minmax(S)]).
% Ébredés: X és S alsó és felső határának változásakor.

clpfd:dispatch_global(sign(X,S), St, St, Actions) :-
    fd_min(X, MinX0), sign_of(MinX0, MinS),
    fd_max(X, MaxX0), sign_of(MaxX0, MaxS),
    fd_min(S, MinS0), sign_min_max(MinS0, MinX, _),
    fd_max(S, MaxS0), sign_min_max(MaxS0, _, MaxX),
    Actions = [X in MinX..MaxX, S in MinS..MaxS|Exit],
    ( max(MinS0,MinS)=:=min(MaxS0,MaxS) -> Exit = [exit]
    ; Exit = []
    ).

% sign_of(X, S): X egész vagy végtelen érték előjele S
sign_of(inf, S) :- !, S = -1.
sign_of(sup, S) :- !, S = 1.
sign_of(X, S) :- S is sign(X).

% sign_min_max(S, Min, Max): sign(x) = S ⇔ x ∈ Min..Max
sign_min_max(-1, inf, -1).
sign_min_max(0, 0, 0).
sign_min_max(1, 1, sup).
```

Példa reifikációt megvalósító globális korlátra

```
% X #=< Y #<=> B, globális korlátként megvalósítva.
lseq_reif(X, Y, B) :-
    B in 0..1, fd_global(lseq_reif(X,Y,B), void,
        [minmax(X),minmax(Y),val(B)]).

clpfd:dispatch_global(lseq_reif(X,Y, B), St, St, Actions) :-
    fd_min(X, MinX), fd_max(X, MaxX),
    fd_min(Y, MinY), fd_max(Y, MaxY),
    ( fdset_interval(_, MaxX, MinY) % MaxX =< MinY
    -> Actions = [exit,B=1]
    ; empty_interval(MinX, MaxY) % MaxY < MinX
    -> Actions = [exit,B=0]
    ; B == 1 -> Actions = [exit, call(user:lseq(X,Y))]
    ; B == 0 -> Actions = [exit, call(user:less(Y,X))]
    % less(U,V) az U#<V feltételt megvalósító globális korlát
    ; Actions = []
    ).
```

Egy nagyobb példa: $\text{exactly}/3$ (\equiv korábbi pontosan/3)

```
% Az Xs listában az I szám pontosan N-szer fordul elő.
% N és az Xs lista elemei FD változók vagy számok lehetnek.
exactly(I, Xs, N) :-
    maplist(embed_in_dom, Xs, Susp),
    length(Xs, Len), N in 0..Len,
    fd_global(exactly(I,Xs,N), Xs/0, [minmax(N)|Susp]).
% Állapot: L/Min ahol L az Xs-ből az I-vel azonos ill. I-től biztosan
% különböző elemek esetleges elhagyásával áll elő, Min az elhagyott I-k száma.

embed_in_dom(X, dom(X)).

% ex_filter(Xs, Ys, NO, N, I): Xs-ből az I-vel azonos ill. I-től biztosan
% különböző elemek elhagyásával kapjuk Ys-t, N = NO + (az elhagyott I-k száma).
ex_filter([], [], N, N, _).
ex_filter([X|Xs], Ys, NO, N, I) :-
    X==I, !, N1 is NO+1, ex_filter(Xs, Ys, N1, N, I).
ex_filter([X|Xs], Ys0, NO, N, I) :-
    fd_set(X, Set), fdset_member(I, Set), !, % X még lehet I
    Ys0 = [X|Ys], ex_filter(Xs, Ys, NO, N, I).
ex_filter([_X|Xs], Ys, NO, N, I) :- % X már nem lehet I
    ex_filter(Xs, Ys, NO, N, I).
```

Egy nagyobb példa: $\text{exactly}/3$, folyt.

```
clpfd:dispatch_global(exactly(I,_,N), Xs0/Min0, Xs/Min, Actions) :-
    ex_filter(Xs0, Xs, Min0, Min, I),
    length(Xs, Len), Max is Min+Len,
    fd_min(N, MinN), fd_max(N, MaxN),
    ( MinN == Max -> Actions = [exit,N=MinN|Ps],
    fdset_singleton(Set, I), maplist(make_in_set(Set), Xs, Ps)
    ; MaxN == Min -> Actions = [exit,N=MaxN|Ps],
    fdset_singleton(Set0, I), fdset_complement(Set0, Set),
    maplist(make_in_set(Set), Xs, Ps)
    ; Actions = [N in Min..Max]
    ).
```

```
make_in_set(Set, X, X in_set Set).
```

```
| ?- exactly(5, [A,B,C], N), N #=< 1, A=5.
    A = 5, B in(inf..4)\(6..sup), C in(inf..4)\(6..sup), N = 1 ?
| ?- exactly(5, [A,B,C], N), A in 1..2, B in 3..4, N #>= 1.
    A in 1..2, B in 3..4, C = 5, N = 1 ?
| ?- _L=[A,B,C], domain(_L,1,3),A #=< B,B #< C, exactly(3, _L, N).
    A in 1..2, B in 1..2, C in 2..3, N in 0..1 ?
```

Probléma az $\text{exactly}/3$ korláttal (SICStus 3.8.6 és előtte)

```
| ?- L = [N,1], N in {0,2}, exactly(0, L, N).
    L = [0,1], N = 0 ? ; no
```

Az idempotencia kérdése

- Legyen $c(X, Y)$ egy globális korlát, amely $[\text{dom}(X), \text{dom}(Y)]$ ébresztésű. Tegyük fel, hogy x tartománya változik, és ennek hatására a korlát szűkíti Y tartományát. Kérdés: ébredjen-e fel ettől újra a korlát?
- A SICStus fejlesztőinek döntése: nem ébred fel a korlát, hatékonysági okokból.
- Emiatt alaphelyzetben a rendszer elvárja a `dispatch_global` kampó eljárástól, hogy az **idempotens** legyen: ha meghívjuk, elvégezzük az akció-lista feldolgozását, majd azonnal újra meghívjuk, akkor a másodszor visszakapott akció-lista már biztosan semmilyen szűkítést ne váltson ki (tehát emiatt felesleges újra meghívni).
- Formálisan: $dg(dg(s)) = dg(s)$, ahol dg az a $tár \rightarrow tár$ függvény, amely a `dispatch_global` akció-listájának a tárra gyakorolt hatását írja le.

Az idempotencia kérdése, folyt.

- Újabban az `fd_global idempotent(false)` opciójával jelezhetjük, hogy nem idempotens a szűkítésünk, ekkor a rendszer a fixpont eléréséig ismételten hívja a `dispatch_global/4-et`.
- Egy problémás helyzet: ha a korlátban szerepelnek azonos vagy egyesítéssel összekapcsolt változók, mint az előző `exactly` példában.
- A SICStus 3.8.7-es változata óta a rendszer figyel az összekapcsolt változókat, és ha ilyeneket talál, akkor nem tekinti a dg függvényt idempotensnek, azaz mindaddig újra hívja, amíg van szűkítés. Emiatt az ismételt ellenőrzésnél kiderül, hogy a problémás példában a korlát meghiúsul:

```
| ?- L = [N,1], N in {0,2}, exactly(0, L, N).
      no
```

4. kis házi feladat

Írj egy `max_lt(L, Z)` globális korlátot, ahol L egy FD változókból álló lista és Z egy FD változó. A korlát jelentése: az L lista maximális eleme kisebb, mint Z . Próbálg meg egy hatékony megoldást készíteni, amely kihagyja az L listából a már behelyettesített elemeket, illetve azokat, amelyek biztosan nem lehetnek maximálisak. Ennek a célnak az elérésére használd ki a `dispatch_global` állapot-paramétereit. Példák:

```
| ?- domain([X,Y,U,Z], 0, 9), max_lt([X,Y,U], Z),
      X#>=4, Y#>=8, U#>=5.
      Y = 8, Z = 9, U in 5..8, X in 4..8
| ?- domain([X,Y,Z], 0, 9), max_lt([X,Y], Z), Z#<=5, X#>=5.
      no
| ?- domain([X,Y,Z], 0, 9), max_lt([X,Y], Z), Z#<=5, X#>=4.
      X = 4, Z = 5, Y in 0..4
```

Felhasználói korlátok: FD predikátumok

FD predikátum

- Szerepe: szűkítési és levezethetőségi szabályok leírása egy halmazértékű funkcionális nyelv segítségével.
- Formája: hasonló a Prolog predikátum formájához, de más a jelentése, és szigorúbb formai szabályok vannak:
 - Egy FD predikátum 1..4 klózból áll, mindegyiknek más a „nyakjele”. A `+` jelű kötelező, a további `-`, `+`, `-?` nyakjelűek csak reifikálандó korlátok esetén kellene.
 - A klózok törzse indexikálisok gyűjteménye (nem konjunkciója!).
 - A `+` ill. `-` jelűek ún. szűkítő (mondó, *tell*) indexikálisokból állnak, amelyek azt írják le, hogy az adott korlát ill. negáltja hogyan szűkítse a tárat. Mindegyik indexikális egy külön démont jelent.
 - A `+` ill. `-?` jelűek *egyetlen* ún. kérdező (*ask*) indexikalist tartalmaznak, amely azt írja le, hogy adott korlát ill. negáltja mikor vezethető le a tárból.
 - Egy FD klóz fejében az argumentumok kötelezően különböző változók; a törzsében csak ezek a változók szerepelhetnek.

Felhasználói korlátok: FD predikátumok

Példa

```
'x=<y' (X,Y) +:           % Az X =< Y korlát szűkítései.
    X in inf..max(Y),     % X szűkítendő az
                          % inf..max(Y) intervallumra,
    Y in min(X)..sup.     % Y a min(X)..sup intervallumra.

'x=<y' (X,Y) -:           % Az X =< Y korlát negáltjának,
    X in (min(Y)+1)..sup, % azaz az X > Y korlátnak a
    Y in inf..(max(X)-1). % szűkítései.

'x=<y' (X,Y) +?          % Ha X tartománya része az
    X in inf..min(Y).     % inf..min(Y) intervallumnak,
                          % akkor X =< Y levezethető.

'x=<y' (X,Y) -?          % Ha X tartománya része a
    X in (max(Y)+1)..sup. % (max(Y)+1)..sup intervallumnak,
                          % akkor X > Y levezethető.
```

Indexikálisok alakja és jelentése

- Egy indexikális alakja: „*Változó* in *TKif*”, ahol a *TKif* tartománykifejezés tartalmazza a *Változó*-tól különböző **összes** fejezőt.
- A **tartománykifejezés** (angolul *range*), egy (parciális) halmazfüggvényt ír le, azaz a benne szereplő változók tartományai függvényében egy halmazt állít elő. Pl. $\min(X) \dots \sup$ értéke $X \text{ in } 1 \dots 10$ esetén $1 \dots \sup$.
- Az „ $X \text{ in } R$ ” **szűkítő** indexikális végrehajtásának lényege: X -et az R tartománykifejezés értékével szűkíti (bizonyos feltételek fennállása esetén, pontosabban később).
- Az $X \text{ in } R(Y, Z, \dots)$ indexikális jelentése a következő reláció:

$$Rel(R) = \{ \langle x, y, z, \dots \rangle \mid x \in R(\{y\}, \{z\}, \dots) \}$$

Másszóval, ha az R -beli változóknak egyelemű a tartománya, akkor az R tartománykifejezés értéke **pontosan** az adott relációt kielégítő X értékek halmaza lesz (vö. a pont-szűkítés definíciójával, 191. oldal).

- Az FD predikátumok **alapszabálya**: az egy FD-klózban levő indexikálisok jelentése (azaz az általuk definiált reláció) azonos kell legyen!!! Ennek oka a „**társasház elv**”: az FD predikátum kiértékelésére a rendszer **bármelyik** indexikalist használhatja.

Indexikálisok alakja és jelentése

Példa: 'x=<y' /2 indexikálisainak jelentése

```
'x=<y' (X, Y) +:
    X in inf..max(Y),           % (1)
    Y in min(X)..sup.          % (2)
```

(1) jelentése:

$$\{ \langle x, y \rangle \mid x \in \inf \dots \max(\{y\}) \} \equiv \{ \langle x, y \rangle \mid x \in (-\infty, y] \} \equiv \{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \}$$

(2) jelentése:

$$\{ \langle x, y \rangle \mid y \in \min(\{x\}) \dots \sup \} \equiv \{ \langle x, y \rangle \mid y \in [x, +\infty) \} \equiv \{ \langle x, y \rangle \mid y \geq x \}$$

(Vegyük észre, hogy egy indexikális jelentése nem változik meg ha \max -ot \min -re cseréljük, vagy fordítva.)

Tartománykifejezések szintaxisa és szemantikája

Jelölések (s egy adott tár):

X egy korlát-változó, tartománya $D(X, s)$.

T egy számkifejezés (*term*), amelynek jelentése egy egész szám vagy egy végtelen érték, ezt $V(T, s)$ -sel jelöljük. (Végtelen érték csak $T_1 \dots T_2$ -ben lehet.)

R egy tartománykifejezés (*range*), amelynek jelentése egy számhalmaz, amit $S(R, s)$ -sel jelölünk.

Számkifejezések (term, T) szintaxisa és szemantikája

Szintaxis	Szemantika
$T \Rightarrow$	$V(T, s) =$
$integer$	$integer$ értéke
$ \ inf$	$-\infty$
$ \ sup$	$+\infty$
$ \ X$	x feltéve, hogy X egész, azaz $D(X, s) = \{x\}$. Egyébként az indexikális függésztődik („pucér” változó esete).
$ \ card(X)$	$ D(X, s) $ (a tartomány elemszáma)
$ \ min(X)$	$\min(D(X, s))$ (a tartomány alsó határa)
$ \ max(X)$	$\max(D(X, s))$ (a tartomány felső határa)
$ \ T_1 + T_2$	$V(T_1, s) + V(T_2, s)$
$ \ T_1 - T_2$	$V(T_1, s) - V(T_2, s)$
$ \ T_1 * T_2$	$V(T_1, s) * V(T_2, s)$ (ahol T_2 biztosan nem negatív)
$ \ T_1 \bmod T_2$	$V(T_1, s) \bmod V(T_2, s)$
$ \ - T_1$	$-V(T_1, s)$
$ \ T_1 /> T_2$	$\lceil V(T_1, s) / V(T_2, s) \rceil$ (felfelé kerekített osztás)
$ \ T_1 /< T_2$	$\lfloor V(T_1, s) / V(T_2, s) \rfloor$ (lefelé kerekített osztás)

Tartománykifejezések (range, R) szintaxisa és szemantikája

Szintaxis	Szemantika
$R \Rightarrow$	$S(R, s) =$
$\{T_1, \dots, T_n\}$	$\{V(T_1, s), \dots, V(T_n, s)\}$
$ \ dom(X)$	$D(X, s)$
$ \ T_1..T_2$	$[V(T_1, s), V(T_2, s)]$ (zárt intervallum)
$ \ R_1 \wedge R_2$	$S(R_1, s) \cap S(R_2, s)$ (metszet)
$ \ R_1 \vee R_2$	$S(R_1, s) \cup S(R_2, s)$ (únió)
$ \ \backslash R_1$	$\backslash S(R_1, s)$ (komplementer halmaz)
$ \ - R_1$	$\{-x \mid x \in S(R_1, s)\}$ (pontonkénti negáció)
$ \ R_1 + R_2$	$\{x + y \mid x \in S(R_1, s), y \in S(R_2, s)\}$ (pont. összeg)
$ \ R_1 + T_2$	$\{x + t \mid x \in S(R_1, s), t = V(T_2, s)\}$
$ \ R_1 - R_2$	$\{x - y \mid x \in S(R_1, s), y \in S(R_2, s)\}$ (p. különbség)
$ \ R_1 - T_2$	$\{x - t \mid x \in S(R_1, s), t = V(T_2, s)\}$
$ \ T_1 - R_2$	$\{t - y \mid t = V(T_1, s), y \in S(R_2, s)\}$
$ \ R_1 \bmod R_2$	$\{x \bmod y \mid x \in S(R_1, s), y \in S(R_2, s)\}$ (p. modulo)
$ \ R_1 \bmod T_2$	$\{x \bmod t \mid x \in S(R_1, s), t = V(T_2, s)\}$
$ \ unionof(X, R_1, R_2)$	únió-kifejezés, ld. 256. oldal
$ \ switch(T, MapList)$	kapcsoló-kifejezés, ld. 257. oldal
$ \ R_1 ? R_2$	feltételes kifejezés, ld. 259. oldal

Tartománykifejezések kiértékelése – példák

● Pontonkénti kivonás és összeadás

```
| f(X,Y) +: Y in 5 - dom(X). % { 5-x | x in dom(X) }
```

```
| ?- X in {1, 3, 5}, f(X, Y). => Y in {0}\{2}\{4}
```

```
| 'x+y=t tsz'(X, Y, T) +:
  X in dom(T) - dom(Y), % { t-y | t in dom(T), y in dom(Y) }
  Y in dom(T) - dom(X), % { t-y | t in dom(T), x in dom(X) }
  T in dom(X) + dom(Y). % { x+y | x in dom(X), y in dom(Y) }
```

```
| ?- X in {10,20}, Y in {0,5}, 'x+y=t tsz'(X, Y, Z).
=> Z in {10}\{15}\{20}\{25}
```

● Pucér változók kezelése

```
| f(X,Y,I) +: Y in \{X,X+I,X-I}.
```

```
| ?- X in {3, 5}, Y in 1..5, f(X, Y, 2). => X in {3, 5}, Y in 1..5
```

```
| ?- X in {3, 5}, Y in 1..5, f(X, Y, 2), X = 3. => Y in {2}\{4}
```

Tartománykifejezések kiértékelése – példák

● Bonyolultabb számkifejezések

```
| 'ax+c=t'(A,X,C,T) +: %feltétel: A és C egész, A > 0
  X in (min(T) - C) /> A .. (max(T) - C) /< A,
  T in min(X)*A + C .. max(X)*A + C.
```

```
| ?- 'ax+c=t'(2,X,1,T), T in 0..4. => X in 0..1, T in 1..3
```

● A rendszer nem mindig hajlandó szűkíteni!

```
| f(X, Y) +: Y in min(X)..sup.
```

```
| ?- X in 5..10, f(X, Y). => Y in 5..sup
```

```
| f(X, Y) +: Y in max(X)..sup.
```

```
| ?- X in 5..10, f(X, Y). => Y in inf..sup
```

● Miért nem szűkít az $Y \text{ in } \max(X) \dots \text{sup}$ indexikális?

- Nem értelmes most leszűkíteni a $10 \dots \text{sup}$ intervallumra, hiszen később, ha pl. $x = 7$ lesz, akkor a $7 \dots \text{sup}$ szakaszra kellene bővíteni, ami nem lehetséges.

- Általánosabban: nem végezhető el a szűkítés ha az indexikális nem **monoton**, azaz X szűkülése esetén a tartománykifejezés értéke növekedhet.

- Ez az indexikális is szűkít majd, de csak x behelyettesítésekor:

```
| ?- X in 5..10, f(X, Y), X #=< 5. => X = 5, Y in 5..sup
```

Indexikálisok monotonitása

Definíciók

- Egy R tartománykifejezés egy s tárban kiértékelhető, ha az R -ben előforduló összes „pucér” változó tartománya az s tárban egyelemű (be van helyettesítve). Ha egy $X \text{ in } R$ indexikálisban R nem kiértékelhető, akkor felfüggesztődik, míg kiértékelhetővé nem válik.
- Egy s tárnak pontosítása s' ($s' \subseteq s$), ha minden X változóra $D(X, s') \subseteq D(X, s)$ (azaz s' szűkítéssel állhat elő s -ből).
- Egy R tartománykifejezés egy s tárra nézve monoton, ha minden $s' \subseteq s$ esetén $S(R, s') \subseteq S(R, s)$, azaz a tár szűkítései a kifejezés értéke is szűkül.
- R s -ben antimonoton, ha minden $s' \subseteq s$ esetén $S(R, s') \supseteq S(R, s)$.
- R s -ben konstans, ha monoton és antimonoton (azaz s szűkülésekor már nem változik).
- Egy indexikalist monotonnak, antimonotonnak, ill. konstansnak nevezünk, ha a tartománykifejezése monoton, antimonoton, ill. konstans.

Indexikálisok monotonitása

Példák

- $\min(X) \dots \max(Y)$ egy tetszőleges tárban monoton.
- $\max(X) \dots \max(Y)$ monoton minden olyan tárban, ahol X behelyettesített, és antimonoton, ahol Y behelyettesített.
- $\text{card}(X) \dots Y$ kiértékelhető, ha Y behelyettesített, és ilyenkor antimonoton.
- $(\min(X) \dots \text{sup}) \setminus / (0 \dots \text{sup})$ egy tetszőleges tárban monoton, és konstans minden olyan tárban, ahol $\min(X) \geq 0$.

Tétel: ha egy „ $X \text{ in } R$ ” indexikális monoton egy s tárban, akkor X értéktartománya az $S(R, s)$ tartománnyal szűkíthető. ($R = R(Y, Z, \dots)$)

Bizonyítás (vázlat): Tegyük fel, hogy $x_0 \in D(X, s)$ egy tetszőleges olyan érték, amelyhez található olyan $y_0 \in D(Y, s)$, $z_0 \in D(Z, s)$, ... értékek, hogy $\langle x_0, y_0, z_0, \dots \rangle$ kielégíti az indexikális által definiált relációt. Azaz

$$\langle x_0, y_0, z_0, \dots \rangle \in \text{Rel}(R) \Leftrightarrow x_0 \in S(R, s'), s' = \{Y \text{ in } \{y_0\}, Z \text{ in } \{z_0\}, \dots\}$$

Itt $s' \subseteq s$, hiszen $y_0 \in D(Y, s)$, $z_0 \in D(Z, s)$, ... A monotonitás miatt $S(R, s) \supseteq S(R, s') \ni x_0$. Így $S(R, s)$ tartalmazza az összes, a reláció által az s tárban megengedett értéket, ezért az $S(R, s)$ -sel való szűkítés jogos.

Szűkítő indexikálisok végrehajtása

Az (anti)monotonitás automatikus megállapítása

- Egy számkifejezésről egyszerűen megállapítható, hogy a tár szűkülésekor nő, csökken, vagy konstans-e (kivéve $T_1 \text{ mod } T_2 \Rightarrow$ ilyenkor megvárjuk, hogy T_2 egész legyen).
- Tartománykifejezések esetén:
 - $T_1 \dots T_2$ monoton, ha T_1 nő és T_2 csökken, antimonoton, ha T_1 csökken és T_2 nő.
 - $\text{dom}(X)$ mindig monoton.
 - A metszet és unió műveletek eredménye (anti)monoton, ha mindkét operandusuk az, a komplementáció művelete megfordítja a monotonitást.
 - A pontonként végzett műveletek megőrzik az (anti)monotonitást (ehhez a T_i operandus konstans kell legyen, pl. $\text{dom}(X) + \text{card}(Y)$ esetén megvárjuk, hogy Y behelyettesített legyen: $\leadsto \text{dom}(X) + 1$).
- Az (anti)monotonitás eldöntésekor a rendszer csak a változók behelyettesítettségét vizsgálja, pl. a $(\min(X) \dots \text{sup}) \setminus / (0 \dots \text{sup})$ kifejezést csak akkor tekinti konstansnak, ha X behelyettesített.

Szűkítő indexikálisok végrehajtása

Az $X \text{ in } R$ szűkítő indexikális feldolgozási lépései

- Végrehajthatóság vizsgálata: ha R -ben behelyettesítetlen „pucér” változó van, vagy R -ről a rendszer nem látja, hogy monoton, akkor az indexikalist felfüggeszti.
- Az aktiválás feltételei az egyes R -beli változókra nézve:
 - $\text{dom}(Y)$, $\text{card}(Y)$ környezetben előforduló Y változó esetén az indexikális a változó tartományának bármilyen módosulásakor aktiválandó;
 - $\min(Y)$ környezetben – alsó határ változásakor aktiválandó;
 - $\max(Y)$ környezetben – felső határ változásakor aktiválandó.
- A szűkítés módja:
 - Ha $D(X, s)$ és $S(R, s)$ diszjunktak, akkor visszalépünk, egyébként
 - a tárat az $X \text{ in } S(R, s)$ korláttal **szűkítjük** (erősítjük), azaz $D(X, s) := D(X, s) \cap S(R, s)$
- A befejezés feltétele: az R tartománykifejezés konstans volta (pl. az összes R -beli változó behelyettesítetté válása). Ekkor $\text{Rel}(R)$ garantáltan fennáll, azaz az **indexikalist tartalmazó korlát** levezethető. Emiatt a korlát **minden** indexikálisra befejezi működését. (Társasház elv – hatékonyság!)

Szűkítő indexikálisok végrehajtása – példák

A végrehajtási lépések egy egyszerű példán

```
'x=<y'(X, Y) +:
    X in inf..max(Y),      % (ind1)
    Y in min(X)..sup.     % (ind2)
```

Az (ind1) indexikális végrehajtási lépései

- Végrehajthatóság vizsgálata: nincs benne pucér változó, monoton.
- Aktiválás: Y felső határának változásakor.
- Szűkítés: X tartományát elmetszük az $\text{inf}.. \text{max}(Y)$ tartománnyal, azaz X felső határát az Y-éra állítjuk, ha az utóbbi a kisebb.
- Befejezés: amikor Y behelyettesítődik, akkor (ind1) konstanssá válik. Ekkor **mindkét** indexikális – (ind1) és (ind2) is – befejezi működését.

Szűkítő indexikálisok végrehajtása – példák

```
'abs(x-y)>=c'(X, Y, C) +:
    X in (inf .. max(Y)-C) \\/ (min(Y)+C .. sup),
    % vagy: X in \ (max(Y)-C+1 .. min(Y)+C-1),
    Y in (inf .. max(X)-C) \\/ (min(X)+C .. sup).
```

```
| ?- 'abs(x-y)>=c'(X,Y,5), X in 0..6. => Y in (inf..1)\/(5..sup)
| ?- 'abs(x-y)>=c'(X,Y,5), X in 0..9. => Y in inf..sup
```

```
no_threat_2(X, Y, I) +:
    X in \{Y,Y+I,Y-I}, Y in \{X,X+I,X-I}.
```

```
| ?- no_threat_2(X, Y, 2), Y in 1..5, X=3. => Y in {2}\/{4}
| ?- no_threat_2(X, Y, 2), Y in 1..5, X in {3,5}. => Y in 1..5
    % (nincs szűkítés, pedig Y nem lehet 3 sem 5)
```

Szűkítő indexikálisok végrehajtása – példák, folyt.

```
'x=<y=<z rossz'(X, Y, Z) +:
    Y in min(X)..max(Z),      % { <x,y,z | x <= y <= z }
    Z in min(Y).. sup,       % { <x,y,z | y <= z }
    X in inf..max(Y).        % { <x,y,z | x <= y }
```

```
| ?- 'x=<y=<z rossz'(15, 5, Z). => Z in 5..sup
    % Társasház elv, 2. indexikális.
```

```
'x=<y=<z lusta'(X, Y, Z) +:
    Y in min(X)..max(Z).     % Hallgatni arany!!
```

```
| ?- 'x=<y=<z lusta'(15, 5, Z). => no
```

Bonyolultabb tartománykifejezések

Únió-kifejezés: $\text{unionof}(X, H, T)$

Itt X változó, H és T tartománykifejezések. Kiértékelése egy s tárban: legyen H értéke az s tárban $S(H, s) = \{x_1, \dots, x_n\}$. (Ha $S(H, s)$ végtelen, a kiértékelést felfüggesztjük.) Képezzük a T_i kifejezéseket úgy, hogy T-ben X helyébe x_i -t írjuk. Ekkor az únió-kifejezés értéke az $S(T_1, s), \dots, S(T_n, s)$ halmazok úniója. Képlettel:

$$S(\text{unionof}(X, H, T), s) = \bigcup \{S(T, (s \wedge X = x)) \mid x \in S(H, s)\}$$

Egy únió-kifejezés kiértékelésének ideje/tárigénye arányos a H tartomány méretével!

% Maximálisan szűkítő, de nagyon nem hatékony!

```
no_threat_3(X, Y, I) +:
    X in unionof(B, dom(Y), \{B,B+I,B-I}),
    Y in unionof(B, dom(X), \{B,B+I,B-I}).
```

```
| ?- no_threat_3(X, Y, 2), Y in 1..5, X in {3,5}. => Y in {1,2,4}
```


Bonyolultabb tartománykifejezések

Kapcsoló-kifejezés: `switch(T, MapList)`

T egy számkifejezés, `MapList` pedig *integer-Range* alakú párokból álló lista, ahol az *integer* értékek mind különböznek (*Range* egy tartománykifejezés). Jelöljük $K = V(T, s)$ (ha T nem kiértékelhető, az indexikalist felfüggesztjük). Ha `MapList` tartalmaz egy $K - R$ párt, akkor a kapcsoló-kifejezés értéke $S(R, s)$ lesz, egyébként az üres halmaz. Példa:

```
% Ha I páros, Z = X, egyébként Z = Y. Vár míg I értéket nem kap.
p(I, X, Y, Z) +: Z in switch(I mod 2, [0-dom(X),1-dom(Y)]).
```

```
p2(I, X, Y, Z) +: % ugyanaz mint p/4, de nem vár.
Z in unionof(J, dom(I) mod 2, switch(J, [0-dom(X),1-dom(Y)])).
```

Bonyolultabb tartománykifejezések

Egy tetszőleges 2-argumentumú reláció megvalósítható egy `unionof-switch` szerkezettel:

```
% absdiff1(x, y): |x - y| = 1 x, y ∈ {0, 1, 2, 3}
absdiff1(X, Y) +:
  X in unionof(B, dom(Y), switch(B, [0-1, 1-0, 2, 2-1, 3, 3-2])),
  Y in unionof(B, dom(X), switch(B, [0-1, 1-0, 2, 2-1, 3, 3-2])).
```

Példa: az $Y \in \{0, 2, 4\}$ tárban `absdiff1` első indexikálisának kiértékelése a következő (jelöljük $MAPL = [0-1, 1-0, 2, 2-1, 3, 3-2]$):

```
X in unionof(B, {0, 2, 4}, switch(B, MAPL)) =
  switch(0, MAPL) \ / switch(2, MAPL) \ / switch(4, MAPL) =
  {1} \ / {1, 3} \ / {} = {1, 3}
```

Bonyolultabb tartománykifejezések

Feltételes kifejezés: `Felt ? Tart`

`Felt` és `Tart` tartománykifejezések. Ha $S(Felt, s)$ üres halmaz, akkor a feltételes kifejezés értéke is üres halmaz, egyébként pedig azonos $S(Tart, s)$ értékével. Példák:

```
% X in 4..8 #<=> B.
'x in 4..8<=>b'(X, B) +:
  B in (dom(X)/\ (4..8)) ? {1} \ / (dom(X)/\ \ (4..8)) ? {0},
  X in (dom(B)/\ 1) ? (4..8) \ / (dom(B)/\ 0) ? \ (4..8).

'x=<y=<z'(X, Y, Z) +: % Ez már helyes!
  Y in min(X)..max(Z),
  Z in ((inf..max(Y)) /\ dom(X)) ? (min(Y)..sup), % (*)
  % ha max(Y) ≥ min(X) akkor min(Y)..sup egyébként {}
  X in ((min(Y)..sup) /\ dom(Z)) ? (inf..max(Y)).
```

A (*) indexikális jobboldalának kiértékelése:

```
X = 15, Y = 5 ->>> (inf..5)/\ {15} ? (5..sup) = {} ? (5..sup) = {}
```

```
X = 15, Y in 5..30 ->>> (inf..30)/\ {15} ? 5..sup =
  {15} ? 5..sup = 5..sup
```

Bonyolultabb tartománykifejezések

Feltételes kifejezés használata a kiértékelés késleltetésére

$A (Felt?(inf..sup) \ / Tart)$ tartománykifejezés értéke $S(Tart, s)$, ha $S(Felt, s)$ üres, egyébként $inf..sup$. Az ilyen szerkezetekben `Tart` értékét a rendszer nem értékeli ki, amíg `Felt` nem üres. Példa:

```
% Maximálisan szűkít, kicsit kevésbé lassú
no_threat_4(X, Y, I) +:
  X in (4..card(Y))?(inf..sup) \ / unionof(B, dom(Y), \B, B+I, B-I), % (**)
  Y in (4..card(X))?(inf..sup) \ / unionof(B, dom(X), \B, B+I, B-I).
```

A (**) indexikális jobboldalának kiértékelése ($I = 1$):

```
Y in 5..8 ->>> (4..4)?(inf..sup) \ / unionof(...) = inf..sup
```

```
Y in 5..7 ->>> (4..3)?(inf..sup) \ / unionof(B, 5..7, \{B, B+1, B-1}) =
  {}?(inf..sup) \ / unionof(B, 5..7, \{B, B+1, B-1}) =
  {} \ / \{5, 6, 4} \ / \{6, 7, 5} \ / \{7, 8, 6} = \{6}
```

Reifikálható FD-predikátumok

Egy reifikálható FD-predikátum

- általában négy klózból áll (a +:, -:, +?, -? nyakjelűekből).
- ha egy adott nyakjelű klóz hiányzik, akkor az adott szűkítés ill. levezethetőség-vizsgálat elmarad.

Példa

```
'x\=y'(X,Y) +:      % 1. a korlátot szűkítő indexikálisok
  X in \{Y},
  Y in \{X}.

'x\=y'(X,Y) -:      % 2. a negáltját szűkítő indexikálisok
  X in dom(Y),
  Y in dom(X).

'x\=y'(X,Y) +?      % 3. a levezethetőséget kérdező
  X in \dom(Y).    % indexikális

'x\=y'(X,Y) -?      % 4. a negált levezethetőségét kérdező
  X in {Y}.        % indexikális (itt felesleges, lásd
                  % később)
```

Reifikálható FD-predikátumok

A kérdező klózek csak **egyetlen** indexikalist tartalmazhatnak. Egy $X \text{ in } R$ kérdező indexikális valójában a $\text{dom}(X) \subseteq R$ feltételt fejezi ki, mint az FD-predikátum (vagy negáltja) levezethetőségi feltételét.

Az ' $x\=y$ ' (X, Y) # \Leftrightarrow B korlát végrehajtásának vázlata

- A 3. klóz figyel, hogy az X és Y változók tartománya diszjunktta vált-e ($\text{dom}(X) \subseteq \text{dom}(Y)$). Ha igen, akkor az ' $x\=y$ ' (X, Y) korlát levezethetővé vált, és így $B=1$.
- A 4. klóz figyel, hogy $X=Y$ igaz-e ($\text{dom}(X) \subseteq \{Y\}$). Ha igen, akkor a korlát negáltja levezethetővé vált, tehát $B=0$.
- Egy külön démon figyel, hogy B behelyettesítődött-e. Ha igen, és $B=1$, akkor felveszi (elindítja) az 1. klózbeli indexikálisokat, ha $B=0$, akkor a 2. klózbelieket.

Reifikálható FD-predikátumok

Kérdező indexikálisok feldolgozása

- Az $X \text{ in } R$ indexikalist felfüggesztjük, amíg kiértékelhető és antimonoton nem lesz (a megfelelő változók be nem helyettesítődnek).
- Az ébresztési feltételek (Y az R-ben előforduló változó):
 - X tartományának bármilyen változásakor
 - $\text{dom}(Y)$, $\text{card}(Y)$ környezetben – bármilyen változásakor
 - $\text{min}(Y)$ környezetben – alsó határ változásakor
 - $\text{max}(Y)$ környezetben – felső határ változásakor
- Ha az indexikális felébred:
 - Ha $D(X, s) \subseteq S(R, s)$, akkor a korlát levezethetővé vált.
 - Egyébként, ha $D(X, s)$ és $S(R, s)$ diszjunktak, valamint $S(R, s)$ monoton is (vagyis konstans), akkor a korlát negáltja levezethetővé vált (emiatt felesleges az ' $x\=y$ ' FD-predikátum 4. klóza).
 - Egyébként újra elaltatjuk az indexikalist.

Reifikálható FD-predikátumok

A végrehajtási lépések egy egyszerű példán

```
'x=<y'(X,Y) +?
  X in inf..min(Y).    % (ind1)
```

Az (ind1) kérdező indexikális végrehajtási lépései

- Végrehajthatóság vizsgálata: nincs benne pucér változó, minden tárban antimonoton.
- Aktiválás: Y alsó határának vagy x tartományának változásakor.
- Levezethetőség: megvizsgáljuk, hogy x tartománya része-e az $\text{inf}.. \text{min}(Y)$ tartománynak, azaz $\text{max}(X) = \text{min}(Y)$ fennáll-e. Ha igen, akkor a korlát levezethetővé vált, a démon befejezi működését, és a reifikációs változó az 1 értéket kapja.
- Negált levezethetősége: megvizsgáljuk, hogy a tartománykifejezés konstans-e, azaz Y behelyettesített-e. Ha igen, akkor megvizsgáljuk, hogy az $\text{inf}.. \text{min}(Y)$ intervallum és x tartománya diszjunktak-e, azaz $Y < \text{min}(X)$ fennáll-e. Ha mindez teljesült, akkor a korlát negáltja levezethetővé vált, a démon befejezi működését, és a reifikációs változó a 0 értéket kapja.

FD-predikátumok, indexikálisok összefoglalása

- Legyen $C(Y_1, \dots, Y_n)$ egy FD-predikátum, amelyben szerepel egy

$$Y_i \text{ in } R(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_n)$$

indexikális. Az R tartománykifejezés által definiált reláció:

$$C = \{ \langle y_1, \dots, y_n \rangle \mid y_i \in S(R, \langle Y_1 = y_1, \dots, Y_{i-1} = y_{i-1}, Y_{i+1} = y_{i+1}, \dots \rangle) \}$$

- **Kiterjesztett alapszabály:** Egy FD-predikátum csak akkor értelmes, ha a pozitív (+: és +? nyakjelű) klózaiban levő összes indexikális ugyanazt a relációt definiálja; továbbá a negatív (-: és -? nyakjelű) klózaiban levő összes indexikális ennek a relációnak a negáltját (komplementjét) definiálja.
- Ha R monoton egy s tárra nézve, akkor $S(R, s)$ -ről belátható, hogy minden olyan y_i értéket tartalmaz, amelyek (az s által megengedett y_j értékekkel együtt) a C relációt kielégítik. Ezért szűkítő indexikálisok esetén jogos az Y_i tartományát $S(R, s)$ -sel szűkíteni (lásd a 250. oldalt).

FD-predikátumok, indexikálisok összefoglalása

- Ha R antimonoton egy s tárra nézve, akkor $S(R, s)$ -ről belátható, hogy minden olyan y_i értéket kizár, amelyekre (az s által megengedett legalább egy y_j érték-rendszerrel együtt) a C reláció nem áll fenn. Ezért kérdező indexikálisok esetén, ha $D(Y_i, s) \subseteq S(R, s)$, jogos a korlátot az s tárból levezethetőnek tekinteni.
- A fentiek miatt természetesen adódik az indexikálisok felfüggesztési szabálya: a szűkítő indexikálisok végrehajtását mindaddig felfüggesztjük, amíg monotonná nem válnak; a kérdező indexikálisok végrehajtását mindaddig felfüggesztjük, amíg antimonotonná nem válnak.
- **Az indexikálisok deklaratív volta:** Ha a fenti alapszabályt betartjuk, akkor a `clpfd` megvalósítás az FD-predikátumot helyesen valósítja meg, azaz mire a változók teljesen behelyettesítetté válnak, az FD-predikátum akkor és csak akkor fog sikeresen lefutni, vagy az 1 értékre tükröződni (reifikálódni), ha a változók értékei a predikátum által definiált relációhoz tartoznak. Az indexikális megfogalmazásán csak az múlik, hogy a nem-konstans táruk esetén milyen jó lesz a szűkítő ill. kérdező viselkedése.

5. kis házi feladat

Írj egy ' $z > \max(x, y)$ ' (X, Y, Z) FD predikátumot, amely a $Z \# > \max(X, Y)$ korlátot valósítja meg tartomány-konzisztens módon! Írd meg mind a négy FD klózt! Vigyázz, hogy a mondó indexikálisok monotonok, a kérdezők antimonotonok legyenek! Példák:

```
t(X, Y, Z, B) :-
    domain([X,Y,Z], 0, 9), 'z>max(x,y)'(X, Y, Z) #<=> B.

| ?- t(X,Y,Z,1).
           X in 0..8, Y in 0..8, Z in 1..9
| ?- t(X,Y,Z,1), X#>=4, Y#>=7.
           X in 4..8, Y in 7..8, Z in 8..9
| ?- t(X,Y,Z,1), X#>=4, Y#>=8.
           Y = 8, Z = 9, X in 4..8
| ?- t(X,Y,Z,1), Z#<=5, X#>=5.
           no
| ?- t(X,Y,Z,1), Z#<=5, X#>=4.
           X = 4, Z = 5, Y in 0..4
```

5. kis házi feladat

```
| ?- t(X,Y,Z,0), X#<=5, Y#<=3.
           X in 0..5, Y in 0..3, Z in 0..5
| ?- t(X,Y,Z,0), Z#>=7, X#<=6.
           X in 0..6, Y in 7..9, Z in 7..9
| ?- t(X,Y,Z,B), Z#>=7, X#<=6, Y#<=4.
           B = 1, X in 0..6, Y in 0..4, Z in 7..9
| ?- t(X,Y,Z,B), Z#<=5, X#>=6, Y#>=8.
           B = 0, X in 6..9, Y in 8..9, Z in 0..5
```

5 A SICStus clp(FD) könyvtára

- CSP, mint háttér
- Alapvető korlátok
- Tükrözött és logikai korlátok
- Kiegészítések és segédeszközök
- Címkézés
- Felhasználó által definiált korlátok
- **Kombinatorikus korlátok**
- FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
- CLPFD esettanulmányok

A kombinatorikus korlátok általános tulajdonságai

- A korlátok nem tükrözhetőek.
- Argumentumaik között van lista.
- Ahol FD változót várnak, értelemszerűen egész szám is állhat.
- A kombinatorikus korlátok fajtái:
 - Aritmetikai-logikai korlátok
 - Kiterjedési korlátok (extensional constraints)
 - Gráfkorlátok
 - Ütemezési korlátok (scheduling constraints)
 - Elhelyezési korlátok (placement constraints)
 - Sorozat korlátok (sequence constraints)

Aritmetikai-logikai korlátok – „mind különbözőek”

```
all_different(Vs [, Options])
```

```
all_distinct(Vs [, Options])
```

- Jelentésük: a `Vs` FD változó-lista elemei páronként különbözőek.
- A korlát szűkítési mechanizmusát az `Options` opció-lista szabályozza.
- A két korlát csak az opciók **alapértelmezésében** tér el.

`Options` eleme lehet:

- `consistency(Cons)` — a szűkítési algoritmust szabályozza. `Cons` lehet:
 - `global` — tartomány-szűkítő algoritmus (Regin), durván az értékek számával arányos idejű (**alapértelmezés** `all_distinct` esetén),
 - `bound` — intervallum-szűkítő algoritmus (Mehlhorn), a változók és értékek számával arányos idejű,
 - `local` — a nemegyenlőség páronkénti felvételével azonos szűkítő erejű algoritmus, durván a változók számával arányos idejű (**alapértelmezés** `all_different` esetén).

Aritmetikai-logikai korlátok – „mind különbözőek” (folyt.)

`Options` eleme lehet (folytatás):

- `on(On)` — az ébredést szabályozza. `On` lehet:
 - `dom` — a változó tartományának bármiféle változásakor ébreszt (**alapértelmezés** `all_distinct` esetén),
 - `min, max, ill. minmax` — a változó tartományának adott ill. bármely határán történő változásakor ébreszt,
 - `val` — a változó behelyettesítésekor ébreszt csak (**alapértelmezés** `all_different` esetén).

A `consistency(local)` beállításnál nincs értelme `val`-nál korábban ébreszteni, mert ez a szűkítést nem befolyásolja.

Példa

```
pelda(Z, I, On, C) :-
```

```
  L = [X,Y,Z], domain(L, 1, 3),
  all_different(L, [on(On),consistency(C)]),
  X #\= I, Y #\= I.
```

```
| ?- pelda(Z, 3, dom, local).      → Z in 1..3
| ?- pelda(Z, 3, min, global).     → Z in 1..3
| ?- pelda(Z, 3, max, bound).      → Z = 3
| ?- pelda(Z, 2, minmax, global).  → Z in 1..3
| ?- pelda(Z, 2, dom, bound).      → Z in 1..3
| ?- pelda(Z, 2, dom, global).     → Z = 2
```

Aritmetikai-logikai korlátok – számlálás

```
count(Val, List, Relop, Count)           pl. count(0, [A,B,C], #=<, 1)
```

- Jelentése: a `Val` egész szám a `List` FD-változó-listában n -szer fordul elő, és fennáll az „ n `Relop` `Count`” reláció.
- `Count` FD változó, `Relop` a hat hasonlító reláció egyike: `#=`, `#\=`, `#<`, `#>`, `#<=`, `#>=`.
- Tartomány-szűkítést biztosít.

Példa: 4-elemű mágikus sorozat

```
magikus4c(L) :-
```

```
  L = [C0,C1,C2,C3], domain(L, 0, 3),
  count(0, L, #=, C0), count(1, L, #=, C1),
  count(2, L, #=, C2), count(3, L, #=, C3),
  sum(L, #=, 4),                               % redundáns aritmetikai
  scalar_product([0,1,2,3], L, #=, 4),        % korlátok
  labeling([ffc], L).
```

```
| ?- magikus4c(L).
```

```
L = [2,0,2,0] ? ;
```

```
L = [1,2,1,0] ? ; no
```

Aritmetikai-logikai korlátok – számlálás (folyt.)

```
global_cardinality(Vars, Vals[, Options]) pl.
```

```
global_cardinality([A,B,C], [9-1,3-X,7-]), X #=<= 1
```

- `Vars` egy FD változókból álló lista.
- `Vals` formája: $[I_1-K_1, I_2-K_2, \dots]$, ahol I_j egész, és K_j FD változó.
- Az I_j értékek mind különbözőek kell legyenek.
- Jelentése: A `Vars`-beli változók csak az I_j értékeket vehetik fel, és minden j esetén a `Vars` listában pontosan K_j darab I_j értékű elem van.
- Tartomány-szűkítést ad, ha `Vals` vagy `Vars` tömör, és még sok más speciális esetben.
- Az `Options` opciólista hasonló az `all_distinct/2` opciólistájához.

Példa: 4-elemű mágikus sorozat

```
magikus4gc(L) :-
```

```
  L = [C0,C1,C2,C3], domain(L, 0, 3),
  global_cardinality(L, [0-C0,1-C1,2-C2,3-C3]),
  sum(L, #=, N), scalar_product([0,1,2,3], L, #=, N), % redundáns
  labeling([ffc], L).
```

Példa: mágikus sorozat, általános megvalósítás

```
:- use_module([library(clpfd),library(between),library(lists)]).
```

```
% Az L lista egy N hosszúságú mágikus sorozatot ír le.
```

```
magikus_c(N, L) :-
```

```
  length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
  numlist(0, N1, Indexek), % Indexek = [0,1,...,N1] (library(between))
  maplist(szamlal(L), Indexek, L),
  sum(L, #=, N), scalar_product(Indexek, L, #=, N),
  labeling([ffc], L).
```

```
szamlal(L, I, Sz) :- count(I, L, #=, Sz).
```

```
% Az L lista egy N hosszúságú mágikus sorozatot ír le.
```

```
magikus_gc(N, L) :-
```

```
  length(L, N), N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
  numlist(0, N1, Indexek),
  maplist(parosit, Indexek, L, Parok),
  global_cardinality(L, Parok),
  sum(L, #=, N), scalar_product(Indexek, L, #=, N),
  labeling([ffc], L).
```

```
parosit(K, V, K-V).
```

Aritmetikai-logikai korlátok – rendezés, permutáció

`sorting(X, I, Y)`

- X , I és Y azonos (n) hosszúságú, **zárt végű**, FD-változókból álló listák.
- Az X lista nagyság szerinti rendezettje az Y lista.
- Az I lista egy a rendezést megvalósító permutáció, azaz I az $1..n$ számok egy permutációja, és minden $i \in 1..n$ esetén $X_i = Y_{I_i}$.

Példa:

```
| ?- sorting([A,B,C], [I1,I2,I3], [X,Y,Z]),
    A in 7..9, B in 5..7, C in 1..4.
A in 7..9, B in 5..7, C in 1..4,
I1 in 2..3, I2 in 2..3, I3 = 1,
X in 1..4, Y in 5..7, Z in 7..9 ?
```

Aritmetikai-logikai korlátok – rendezés, permutáció 2

`assignment(X, Y[, Options])`

- X és Y FD változókból alkotott azonos (n) hosszúságú listák.
- Jelentése: X_i és Y_i mind az $1..n$ tartományban vannak és $X_i=j \Leftrightarrow Y_i=i$.
- Másszóval: X egy-egyértelmű leképezés az $1..n$ halmazon (az $1..n$ számok egy permutációja) és Y az X inverze.
- Az `Options` lista ugyanolyan, mint az `all_different/[1,2]` korlát esetében, az alapértelmezés `[on(domain), consistency(global)]`.

Példa:

```
| ?- length(L, 3), domain(L, 1, 3), assignment(L, LInv), L=[2|_|,
    labeling([], L).
    L = [2,1,3], LInv = [2,1,3] ? ;
    L = [2,3,1], LInv = [3,1,2] ? ; no
```

Kiterjedési korlátok – intervallumon értelmezett függvények

`element(X, List, Y)`

- Jelentése: $List$ X -edik eleme Y (a listaelemeket 1-től számozva).
- X és Y FD változók, $List$ FD változókból álló lista.
- Az X változóra nézve tartomány-szűkítést, az Y és $List$ változókra nézve intervallum-szűkítést ad.

Példák:

```
| ?- element(X, [0,1,2,3,4], Y), X in {2,5}.           % Y #= X-1
    X in {2}\{/5}, Y in 1..4 ?
| ?- element(X, [0,1,2,3,4], Y), Y in {1,4}.         % Y #= X-1
    X in {2}\{/5}, Y in {1}\{/4} ?

% X #= C #=<=> B megvalósítása, 1 =< X, C =< 6 esetre
% (C konstans).
beq(X, C, B) :-
    X in 1..6, call(I #= X+6-C),
    element(I, [0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0], B).
```

Kiterjedési korlátok – kétargumentumú relációk

`relation(X, Rel, Y)`

- X és Y FD változók, Rel egy lista *Egész-KonstansTartomány* alakú párokból (ahol mindegyik *Egész* csak egyszer fordulhat elő).
- Jelentése: Rel tartalmaz egy X -Tart párt, ahol Y eleme a $Tart$ -nak, azaz:

$$\text{relation}(X, H, Y) \equiv \langle X, Y \rangle \in \{ \langle x, y \rangle \mid x - T \in H, y \in T \}$$

- Tetszőleges bináris reláció definiálására használható.
- Tartomány-szűkítést biztosít.

Példák:

```
'abs(x-y)>1'(X,Y) :- relation(X, [0-(2..5), 1-(3..5), 2-{0,4,5},
    3-{0,1,5}, 4-(0..2), 5-(0..3)], Y).

sq1(X, Y) :- % Y*Y = X
    relation(X, [0-{0}, 1-{-1,1}, 4-{-2,2}], Y).

| ?- 'abs(x-y)>1'(X,Y), X in 2..3.
    Y in (0..1)\/(4..5) ?

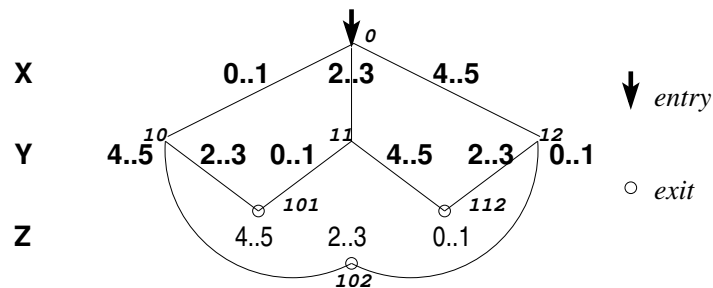
| ?- X #\= 1, sq1(X, Y).
    X in {0}\{/4}, Y in {-2}\{/0}\{/2} ?
```

Kiterjedési korlátok – általános relációk

A case korlát – példa

% X, Y és Z felének egészrésze mind más: $\lfloor \frac{X}{2} \rfloor \neq \lfloor \frac{Y}{2} \rfloor, \lfloor \frac{X}{2} \rfloor \neq \lfloor \frac{Z}{2} \rfloor, \lfloor \frac{Y}{2} \rfloor \neq \lfloor \frac{Z}{2} \rfloor$
 felemasok(X, Y, Z) :-

```
case(f(A,B,C), [f(X,Y,Z)],
     [node(0, A, [(0..1)-10, (2..3)-11, (4..5)-12]),
      node(10, B, [(2..3)-101, (4..5)-102]),
      node(11, B, [(0..1)-101, (4..5)-112]),
      node(12, B, [(0..1)-102, (2..3)-112]),
      node(101,C,[4..5]), node(102,C,[2..3]), node(112,C,[0..1])
     ]).
```



Kiterjedési korlátok – általános relációk

case(Template, Tuples, DAG[, Options])

- Jelentése: A Tuples lista minden elemét illesztve a Template mintára a DAG által leírt reláció fennáll.
- Az ébresztést és a szűkítést az Options opció-lista szabályozza (hasonló módon, mint az all_distinct esetén, lásd SICStus kézikönyv).
- Alaphelyzetben minden változásra ébred és tartomány-szűkítést ad.
- A DAG csomópontok listája, az első elem a kezdőpont.
- Egy csomópont alakja: node(ID, X, Successors), ahol ID a csomópont azonosítója (egész), X a vizsgálandó változó.
- Belső gráfpont esetén Successors a rákövetkező csomópontok listája, elemei (Min..Max)-ID2 alakúak (jelentése: ha $Min \leq X \leq Max$, akkor menjünk az ID2 csomópontra).
- Végpont esetén Successors a végfeltételek listája, elemei (Min..Max) alakúak (jelentése: ha valamelyik elem esetén $Min \leq X \leq Max$ fennáll, akkor a reláció teljesül).

Kiterjedési korlátok – általános relációk

Példa többszörös mintára (case(T, [A1, ...], D) ≡ case(T, [A1], D), ...)

```
felemasok_vacak(X, Y, Z) :-
  case(A\=B, [X\=Y, X\=Z, Y\=Z],
       [node(root, A, [(0..1)-0, (2..3)-1, (4..5)-2]),
        node(0, B, [2..5]), node(1, B, [0..1, 4..5]), node(2, B, [0..3])
       ]).
```

Gráfkorlátok

circuit(X)

- $X = [X_1, \dots, X_n]$ egy n hosszúságú lista.
- Igaz, ha minden x_i az $1..n$ tartományba esik, és $x_1, x_{x_1}, x_{x_{x_1}} \dots$ (n -szer ismételve) az $1..n$ egy permutációja.
- Másszóval: x egy egyetlen ciklusból álló permutációja az $1..n$ számoknak.
- Gráf-értelmezés: Legyen egy n szögpontú irányított gráfunk, jelöljük a csomópontokat az $1..n$ számokkal. Vegyünk fel n FD változót, x_i tartománya álljon azon j számokból, amelyekre i -ből vezet j -be él. Ekkor circuit(X) azt jelenti, hogy az $i \rightarrow x_i$ élek a gráf egy Hamilton-körét adják.

circuit(X, Y)

- Ekvivalens a következővel: circuit(X), assignment(X, Y).

Példa

```
| ?- length(L, 3), domain(L, 1, 3), circuit(L, LInv), L=[2|_].
      L = [2,3,1], LInv = [3,1,2] ? ; no
```

Gráfkorlátok – példák

Cikkcakk feladat

Adott egy téglalap alakú táblázat, minden mezőben az a,b,c,d betűk egyike. Az él- vagy sarokszomszédos kockák között lépegetve el kell jutni a bal felső sarokból a jobb alsóba, úgy, hogy a közben érintett mezőkben az a,b,c,d,a,b,c,d,... betűk legyenek.

```
% A feladat: a b b változók: _1 _2 _3 megoldás: 2 4 6
%           c a c           _4 _5 _6           7 3 8
%           d d a           _7 _8 _9           5 9 1

| ?- L=[_1,_2,_3,_4,_5,_6,_7,_8,1], _1=2, _2 in {4,6}, _3=6,
      _4 in {7,8}, _5 in {2,3}, _6=8, _7=5, _8 in {5,9},
      circuit(L).

      L = [2,4,6,7,3,8,5,9,1] ? ; no
```

Gráf-korlátok – példák

Az utazó ügynök probléma (TSP)

Adott egy teljes, súlyozott gráf. Keresendő egy minimális összsúlyú Hamilton kör. Egy általánosabb megoldás: a `library('clpfd/examples/tsp')` állományban található.

```
% Az adott TSP feladatnak a Lab címkézés melletti megoldása
% a Successor rákövetkező-lista és a Cost költség.
tsp(Lab, Successor, Cost) :-
    tsp_costs(Successor, Costs),
    tsp_costs(Predecessor, Costs2),
    sum(Costs, #=, Cost),
    sum(Costs2, #=, Cost),
    circuit(Successor, Predecessor),
    append(Successor, Predecessor, All),
    labeling([minimize(Cost)|Lab], All).
```

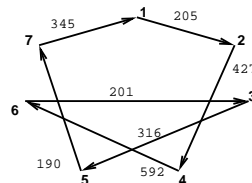
Gráf-korlátok – példák

% A TSP feladat költségmátrixa alapján a Successor
% rákövetkező-listának a Costs költséglista felel meg.

```
tsp_costs(Successor, Costs) :-
    Successor = [X1,X2,X3,X4,X5,X6,X7],
    Costs = [C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7],
    element(X1, [ 0, 205, 677, 581, 461, 878, 345], C1),
    element(X2, [205, 0, 882, 427, 390,1105, 540], C2),
    element(X3, [677, 882, 0, 619, 316, 201, 470], C3),
    element(X4, [581, 427, 619, 0, 412, 592, 570], C4),
    element(X5, [461, 390, 316, 412, 0, 517, 190], C5),
    element(X6, [878,1105, 201, 592, 517, 0, 691], C6),
    element(X7, [345, 540, 470, 570, 190, 691, 0], C7).
```

```
| ?- tsp([ff], Succs, Cost).
```

```
Cost = 2276,
Succs = [2,4,5,6,7,3,1] ?
```



Ütemezési korlátok

```
cumulative(Starts, Durations, Resources, Limit[, Opts])
```

- Az első három argumentum FD változókból álló egyforma (n) hosszú lista, a negyedik egy FD változó.
- Jelentése: a `Starts` kezdőidőpontokban elkezdett, `Durations` ideig tartó és `Resources` erőforrásigényű feladatok bármely időpontban összesített erőforrásigénye nem haladja meg a `Limit` határt (és fennállnak az `Opts`-beli opcionális korlátok).
- Egy `cumulative(S, D, R, Lim)` korlát jelentése formálisan:

$$R_{i1} + \dots + R_{in} \leq Lim, \text{ minden } a \leq i < b \text{ esetén,}$$

ahol

$a = \min(S_1, \dots, S_n)$ (kezdőidőpont),
 $b = \max(S_1 + D_1, \dots, S_n + D_n)$ (végidőpont),
 $R_{ij} = R_j$, ha $S_j \leq i < S_j + D_j$, egyébként $R_{ij} = 0$
(a j . feladat erőforrásigénye az i . időpontban).

További ütemezési korlátok

`serialized(Starts, Durations[, Options])`

- A `cumulative` speciális esete, ahol az összes erőforrás-igény és az erőforrás-korlát is 1.
- Így a korlát jelentése: a `Starts` kezdőidőpontú, `Durations` hosszú feladatok nem fedik át egymást.

`cumulatives(Tasks, Machines[, Options])`

- Több erőforrást (gépet) igénylő feladatok ütemezése (lásd SICStus kézikönyv).

Ütemezési korlátok – példa

Egy egyszerű ütemezési probléma

- rendelkezésre álló erőforrások száma: 13 (pl. 13 ember)
- az egyes tevékenységek időtartama és erőforrásigénye:

Tevékenység	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7
Időtartam	16	6	13	7	5	18	4
Erőforrásigény	2	9	3	7	10	1	11
Egy megoldás	0–16	16–22	9–22	9–16	4–9	4–22	0–4

Ütemezési korlátok – példa

% A fenti ütemezési feladatban a tevékenységek kezdőidőpontjait
% az `Ss` lista tartalmazza, a legkorábbi végidőpont az `End`.

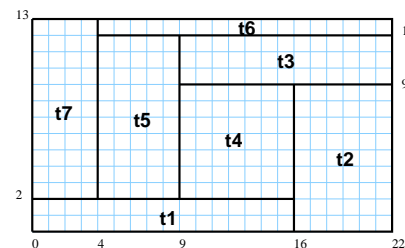
```
schedule(Ss, End) :- length(Ss, 7),
    Ds = [16, 6, 13, 7, 5, 18, 4],
    Rs = [ 2, 9, 3, 7, 10, 1, 11],
    domain(Ss, 0, 30), End in 0.. 50,
    after(Ss, Ds, End), cumulative(Ss, Ds, Rs, 13),
    labeling([ff, minimize(End)], [End|Ss]).
```

% `after(Ss, Ds, E)`: Az `E` időpont az `Ss` kezdetű `Ds` időtartamú
% tevékenységek mindegyikének befejezése után van.

```
after([], [], _).
after([S|Ss], [D|Ds], E) :- E #>= S+D, after(Ss, Ds, E).
```

```
| ?- schedule(Ss, End).
```

```
Ss = [0,16,9,9,4,4,0],
End = 22 ? ;
no
```



Elhelyezési korlátok – diszjunkt szakaszok

`disjoint1(Lines[, Options])`

- Jelentése: A `Lines` által megadott intervallumok diszjunktak.
- `Lines` $F(S_j, D_j)$ vagy $F(S_j, D_j, T_j)$ alakú kifejezések listája, ahol S_j és D_j a j . szakasz kezdőpontját és hosszát megadó változók. F tetszőleges funktor, T_j egy atom vagy egy egész, amely a szakasz típusát definiálja (alapértelmezése 0).
- `Options` a következőket tartalmazhatja (`Boolean` alapértelmezése `false`):
 - `decomposition(Boolean)`: Ha `Boolean true`, akkor minden ébredéskor megpróbálja kisebb darabokra bontani a korlátot.
 - `global(Boolean)`: Ha `Boolean true`, akkor egy redundáns algoritmust használ a jobb szűkítés érdekében.
 - `wrap(Min, Max)`: A szakaszok nem egy egyenesen, hanem egy körön helyezkednek el, ahol a `Min` és `Max` pozíciók egybeesnek. Ez az opció a `Min..(Max-1)` intervallumba kényszeríti a kezdőpontokat.
 - `margin(T1, T2, D)`: Bármely T_1 típusú vonal végpontja legalább D távolságra lesz bármely T_2 típusú vonal kezdőpontjától, ha D egész. Ha D nem egész, akkor a `sup` atomnak kell lennie, ekkor minden T_2 típusú vonalnak előrébb kell lennie bármely T_1 típusú vonalnál.

Példa

```
| ?- domain([S1,S2,S3], 0, 9),
      (G = false ; G = true),
      disjoint1([S1-8,S2-2,S3-2], [global(G)]).
```

```
G = false,
S1 in 0..9, S2 in 0..9, S3 in 0..9 ? ;
G = true,
S1 in 4..9, S2 in 0..7, S3 in 0..7 ?
```

`disjoint2(Rectangles[, Options])`

- Jelentése: A `Rectangles` által megadott téglalapok nem metszik egymást.
- A `Rectangles` lista elemei $F(S_{j1}, D_{j1}, S_{j2}, D_{j2})$ vagy $F(S_{j1}, D_{j1}, S_{j2}, D_{j2}, T_j)$ alakú kifejezések.
- S_{j1} és D_{j1} a j . téglalap X irányú kezdőpontját és hosszát jelölő változók, S_{j2} és D_{j2} ezek Y irányú megfelelői; F tetszőleges funktor; T_j egy egész vagy atom, amely a téglalap típusát jelöli (alapértelmezése 0).
- `Options` opciólista hasonló a `disjoint1`-beli opciólistához, a részleteket lásd a SICStus kézikönyvben.

Példa

Helyezzünk el három diszjunkt téglalapot úgy, hogy (x, y) bal alsó sarkuk az $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ téglalapban legyen.

A méretek $(x * y)$ sorrendben): 1*3, 2*2, 3*3. Az 1*3-as téglalap x koordinátája nem lehet 2.

```
| ?- domain([X1,X2,X3], 0, 2), domain([Y1,Y2,Y3], 0, 1), X1 #\= 2,
      disjoint2([r(X1,3,Y1,1),r(X2,2,Y2,2),r(X3,3,Y3,3)]).
```

```
X1 in 0..1, Y1 = 0, X2 = 0, Y2 = 1, X3 = 2, Y3 = 1
```

5 A SICStus clp(FD) könyvtára

- CSP, mint háttér
- Alapvető korlátok
- Tükrözött és logikai korlátok
- Kiegészítések és segédeszközök
- Címkézés
- Felhasználó által definiált korlátok
- Kombinatorikus korlátok
- FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
- CLPFD esettanulmányok

FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag

Szerzők: Hanák Dávid és Szeredi Tamás

Az FDBG könyvtár célkitűzései

- követhető legyen a véges tartományú (röviden: FD) korlát változók tartományainak szűkülése;
- a programozó értesüljön a korlátok felébredéséről, kilépéséről és hatásairól, valamint az egyes címkézési lépésekről és hatásukról;
- jól olvasható formában lehessen kiírni FD változókat tartalmazó kifejezéseket.

Fogalmak

- *CLP(FD) események*
 - globális korlát felébredése
 - valamely címkézési esemény (címkézés kezdése, címkézési lépés vagy címkézés meghiúsulása)
- *Megjelenítő (Visualizer)*
A CLP(FD) eseményekre reagáló predikátum, általában kiírja az aktuális eseményt valamilyen formában. Mindkét eseményosztályhoz tartozik egy-egy megjelenítő-típus:
 - korlát-megjelenítő
 - címkézés-megjelenítő
 Mindkét fajta megjelenítő az események tényleges bekövetkezése, hatásaiak érvényesülése *előtt* hívódik meg.
- *Jelmagyarázat (Legend)*
 - változók és a hozzájuk tartozó tartományok listája;
 - a vizsgált korlát viselkedésével kapcsolatos következtetések;
 - rendszerint az éppen megfigyelt korlát után íródik ki.

FDBG – egyszerű példák (enyhén formázva)

```
| ?- use_module([library(clpfd),library(fdbg)]).
| ?- fdbg_on.
% The clp(fd) debugger is switched on
% advice
| ?- Xs=[X1,X2], fdbg_assign_name(Xs, 'X'),
    domain(Xs, 1, 6), X1+X2 #= 8, X2 #>= 2*X1+1.

domain([<X_1>,<X_2>],1,6)      X_1 = inf..sup -> 1..6
                              X_2 = inf..sup -> 1..6
                              Constraint exited.

<X_1>+<X_2>#=8                X_1 = 1..6 -> 2..6
                              X_2 = 1..6 -> 2..6

<X_2>#>=2*<X_1>+1            X_2 = 2..6 -> 5..6
                              X_1 = 2..6 -> {2}
                              Constraint exited.

<X_2>#=6    [2+<X_2>#=8 (*)]  X_2 = 5..6 -> {6}
                              Constraint exited.

X1 = 2, X2 = 6 ?
% advice
```

A (*) olvashatóbb alak a library(fdbg) négy sorának kikommentezésével állítható elő.

FDBG – egyszerű példák (enyhén formázva)

```
| ?- X in 1..4, labeling([bisect],[X]).

<fdvar_1> in 1..4              fdvar_1 = inf..sup -> 1..4
                              Constraint exited.

Labeling [2, <fdvar_1>]: starting in range 1..4.
Labeling [2, <fdvar_1>]: bisect: <fdvar_1> =< 2
  Labeling [4, <fdvar_1>]: starting in range 1..2.
  Labeling [4, <fdvar_1>]: bisect: <fdvar_1> =< 1
X = 1 ? ;
  Labeling [4, <fdvar_1>]: bisect: <fdvar_1> >= 2
X = 2 ? ;
  Labeling [4, <fdvar_1>]: failed.
Labeling [2, <fdvar_1>]: bisect: <fdvar_1> >= 3
  Labeling [8, <fdvar_1>]: starting in range 3..4.
  Labeling [8, <fdvar_1>]: bisect: <fdvar_1> =< 3
X = 3 ? ;
  Labeling [8, <fdvar_1>]: bisect: <fdvar_1> >= 4
X = 4 ? ;
  Labeling [8, <fdvar_1>]: failed.
Labeling [2, <fdvar_1>]: failed.
no
```

Jellemzők

Nyomon követhető korlátok

- csak globális korlátok, indexikálisok nem;
- lehetnek beépített vagy felhasználói korlátok egyaránt;
- bekapcsolt nyomkövetés esetén a formula-korlátokból mindenképpen globális korlátok generálódnak (és nem indexikálisok).

CLP(FD) események figyelése

- az egyes események hatására meghívódik egy vagy több megjelenítő;
- a meghívott megjelenítő lehet beépített vagy felhasználó által definiált.

Az FDBG be- és kikapcsolása

`fdbg_on` illetve `fdbg_on(+Options)`

Engedélyezi a nyomkövetést alapértelmezett vagy megadott beállításokkal. A nyomkövetést az `fdbg_output` álnevű (stream alias) folyamra írja a rendszer; alaphelyzetben ez a pillanatnyi kimeneti folyam (*current output stream*) lesz. Legfontosabb opciók:

- `file(FileName, Mode)`
A megjelenítők kimenete a *FileName* nevű állományba irányítódik át, amely az `fdbg_on/1` hívásakor nyílik meg *Mode* módban (`write` vagy `append`).
- `stream(Stream)`
A megjelenítők kimenete a *Stream* folyamra irányítódik át.
- `constraint_hook(Goal)`
Goal két argumentummal kiegészítve meghívódik a korlátok felébredésekor. Alapértelmezésben `fdbg_show/2`, ld. később.
- `labeling_hook(Goal)`
Goal három argumentummal kiegészítve meghívódik minden címkézési eseménykor. Alapértelmezésben `fdbg_label_show/3`, ld. később.
- `no_constraint_hook, no_labeling_hook`
Nem lesz adott fajtájú megjelenítő.

Jellemzők

Segédeszközök megjelenítők írásához

A nyomkövető eljárásokat biztosít

- kifejezésekben található FD változók megjelöléséhez (*annotálás*hoz);
- annotált kifejezések jól olvasható kiírásához;
- jelmagyarázat előkészítéséhez és kiírásához.

Kifejezések elnevezése

Név rendelhető egy-egy változóhoz vagy tetszőleges kifejezéshez;

- ilyenkor minden, a kifejezésben előforduló változó is „értelmes” nevet kap;
- egyes esetekben automatikusan is előállhatnak nevek;
- a név segítségével hivatkoznak a megjelenítők az egyes változókra;
- az elnevezett kifejezések lekérdezhetők a nevük alapján.

Az FDBG be- és kikapcsolása

`fdbg_off`

Kikapcsolja a nyomkövetést. Lezárja a `file` opció hatására megnyitott állományt.

1. példa

Kimenet átirányítása, beépített megjelenítő, nincs címkézési nyomkövetés.

```
| ?- fdbg_on([file('my_log.txt', append), no_labeling_hook]).
```

2. példa

Kimenet átirányítása szabványos folyamra, saját és beépített megjelenítő együttes használata.

```
| ?- fdbg_on([constraint_hook(fdbg_show), constraint_hook(my_show),
              stream(user_error)]).
```

Beépített megjelenítők

`fdbg_show(+Constraint, +Actions)`

Beépített korlát-megjelenítő. A `dispatch_global`-ból való kilépéskor hívódik meg. Megkapja az aktuális korlátot és az általa előállított akciólistát. Ennek alapján megjeleníti a korlátot és a hozzá tartozó jelmagyarázatot.

„Szimulált” példa-hívás:

```
| ?- Xs=[X1,X2,X3], fdbg_assign_name(Xs, 'X'),
    domain(Xs, 1, 3), X3 #\= 3,
    fdbg_on,
    fdbg_show(exactly(3,Xs,2), [exit,X1=3,X2=3]).

exactly(3, [<X_1>, <X_2>, <X_3>], 2)
X_1 = 1..3 -> {3}
X_2 = 1..3 -> {3}
X_3 = 1..2
Constraint exited.
```

Kifejezések elnevezése

Egy kifejezés elnevezésekor

- a megadott név hozzárendelődik a teljes kifejezéshez;
- a kifejezésben szereplő összes változóhoz egy-egy származtatott név rendelődik – ez a név a megadott névből és a változó kiválasztójából keletkezik (struktúra argumentum-sorszámok ill. lista indexek sorozata);
- a létrehozott nevek egy globális listába kerülnek;
- ez a lista mindig egyetlen toplevel híváshoz tartozik (*illékony*).

Beépített megjelenítők

`fdbg_label_show(+Event, +ID, +Variable)`

Beépített címkézés-megjelenítő. Címkézési eseménykor (kezdet, szűkítés, meghíúsulás) hívódik meg. Megkapja az eseményt, a címkézési lépés azonosítóját és a címkézett változót. Példa:

```
| ?- fdbg_assign_name(X, 'X'), X in {1,3}, fdbg_on,
    indomain(X).

% The clp(fd) debugger is switched on
Labeling [1, <X>]: starting in range {1}\/{3}.
Labeling [1, <X>]: indomain_up: <X> = 1

X = 1 ? ;
Labeling [1, <X>]: indomain_up: <X> = 3

X = 3 ? ;
Labeling [1, <X>]: failed.

no
```

A fenti kimenet elkészítése során végrehajtott megjelenítő-hívások:

```
fdbg_label_show(start,1,X)
fdbg_label_show(step('$labeling_step'(X,=,1,indomain_up)),1,X)
fdbg_label_show(step('$labeling_step'(X,=,3,indomain_up)),1,X)
fdbg_label_show(fail,1,X)
```

Kifejezések elnevezése

Származtatott nevek

származtatott név = névtő + kiválasztó

Pl. `fdbg_assign_name(foo, bar(A, [B, C]))` hatására a következő nevek generálódnak:

név	kifejezés	megjegyzés
foo	<code>bar(A, [B, C])</code>	a teljes kifejezés
foo_1	A	bar első argumentuma
foo_2_1	B	bar második argumentumának első eleme
foo_2_2	C	bar második argumentumának második eleme

Kifejezések elnevezése

Predikátumok

- `fdbg_assign_name(+Name, +Term)`
A *Term* kifejezéshez a *Name* nevet rendeli az aktuális toplevel hívásban.
- `fdbg_current_name(?Name, -Term)`
 - lekérdez egy kifejezést (változót) a globális listából a neve alapján;
 - felsorolja az összes tárolt név-kifejezés párt.
- `fdbg_get_name(+Term, -Name)`
Name a *Term* kifejezéshez rendelt név. Ha *Term*-nek még nincs neve, automatikusan hozzárendelődik egy.

Testreszabás

`fdbg_show/2` kimenetének hangolása kampókkal

- A következő kampóknak három argumentuma van:
 - *Name*: az FD változó neve
 - *Variable*: maga a változó
 - *FDSetAfter*: a változó tartománya, *miután* az aktuális korlát elvégezte rajta a szűkítéseket
- `fdbg:fdvar_portray(+Name, +Variable, +FDSetAfter)`
A kiírt korlátokban szereplő változók megjelenésének megváltoztatására szolgál. Az alapértelmezett viselkedés *Name* kiírása kacsacsőrök között.
- `fdbg:legend_portray(+Name, +Variable, +FDSetAfter)`
A jelmagyarázat minden sorára meghívódik. A sorokat mindenképpen négy szóköz nyitja és egy újsor karakter zárja.

Testreszabás – példa

```
:- multifile fdbg:fdvar_portray/3.
fdbg:fdvar_portray(Name, Var, _) :-
    fd_set(Var, Set), fdset_to_range(Set, Range),
    format('~p = ~p', [Name,Range]).

:- multifile fdbg:legend_portray/3.
fdbg:legend_portray(Name, Var, Set) :-
    fd_set(Var, Set0), fdset_to_list(Set0, L0),
    ( Set0 == Set
    -> format("~p = ~p", [Name, L0])
    ; fdset_to_list(Set, L),
      format("~p = ~p -> ~p", [Name,L0,L])
    ).
```

Kimenet, összevetve az alapértelmezettel:

Eredeti alak	Testreszabott alak
<code>exactly(3, [<X>,2],1)</code>	<code>exactly(3, [<X = 1..3>,2],1)</code>
<code>X = 1..3 -> {3}</code>	<code>X = [1,2,3] -> [3]</code>
<code>Constraint exited.</code>	<code>Constraint exited.</code>

Saját megjelenítő írása

- **Globális korlát megjelenítő**
`my_global_visualizer(+Arg1, ..., +Constraint, +Actions)`
Constraint az éppen felébredt korlát, *Actions* az általa visszaadott akciólista.
`fdbg_on(constraint_hook(my_global_visualizer(Arg1, ...)))`
- **Címkézés megjelenítő**
`my_labeling_visualizer(+Arg1, ..., +Event, +ID, +Var)`
Event egy az eseményt leíró kifejezés:
 - `start` egy címkézés kezdete
 - `fail` egy címkézés megghiúsulása
 - `step(Step)` egy címkézési lépés, amelyet *Step* ír le*ID* a címkéző kísérlet azonosítója, *Var* pedig a címkézett változó.
`fdbg_on(labeling_hook(my_labeling_visualizer(Arg1, ...)))`

Saját megjelenítő írása

Érdeemes megnézni az `fdbg_show/2` megjelenítő kódját:

```
fdbg_show(Constraint, Actions) :-
    fdbg_annotate(Constraint, Actions, AnnotC, CVars),
    print(fdbg_output, AnnotC),
    nl(fdbg_output),
    fdbg_legend(CVars, Actions),
    nl(fdbg_output).
```

Gyakran szükség lehet arra, hogy csak bizonyos korlátokat vizsgáljunk. Ilyenkor jól jön egy szűrő, pl.

```
filtered_show(Constraint, Actions) :-
    Constraint = scalar_product(_,_,_,_),
    fdbg_show(Constraint, Actions).
```

(Az nem baj, ha egy megjelenítő meghíúsul.)

És hogy használni is tudjuk:

```
:- fdbg_on([constraint_hook(filtered_show),
           file('fdbg.log', write)]).
```

Segéd-predikátumok

A változók tartományának kiírásához és az ún. *annotáláshoz* több predikátum adott. Ezeket használják a beépített nyomkövetők, de hívhatók kívülről is.

Annotálás

- `fdbg_annotate(+Term0, -Term, -Vars)`
`fdbg_annotate(+Term0, +Actions, -Term, -Vars)`
 A *Term0* kifejezésben található összes FD változót megjelöli, azaz lecseréli egy `fdvar/3` struktúrára. Ennek tartalma:
 - a változó neve;
 - a változó maga (tartománya még a szűkítés előtti állapotokat tükrözi);
 - egy FD halmaz, amely a változó tartománya *lesz az Actions* akciólista szűkítése után.

Az így kapott kifejezés *Term*, a beszűrt `fdvar/3` struktúrák listája *Vars*.

Segéd-predikátumok

Példa annotálás

```
| ?- length(L, 2), domain(L, 0, 10), fdbg_assign_name(L, x),
    L=[X1,X2], fdbg_annotate(lseq(X1,X2), Goal, _),
    format('write(Goal) --> ~w~n', [Goal]),
    format('print(Goal) --> ~p~n', [Goal]).
```

```
write(Goal) --> lseq(fdvar(x_1,_2,[[0|10]]),fdvar(x_2,_2,[[0|10]]))
print(Goal) --> lseq(<x_1>,<x_2>)
```

Az `fdvar/3` struktúrára az `fdbg` modul definiál egy `portray` klózt, amely a fenti tömör módon írja ki a struktúrát.

Segéd-predikátumok

Jelmagyarázat

- `fdbg_legend(+Vars)`
`fdbg_legend(+Vars, +Actions)`
 Az `fdbg_annotate/3,4` által előállított változólistát és az *Actions* listából levonható következtetéseket jelmagyarázatként kiírja:
 - egy sorba egy változó leírása kerül;
 - minden sor elején a változó neve szerepel;
 - a nevet a változó tartománya követi (régire \rightarrow új).

Nagyobb példa – mágikus sorozatok

```
magic(N, L) :-
    length(L, N),
    fdbg_assign_name(L, x), % <--- !!!
    N1 is N-1, domain(L, 0, N1),
    occurrences(L, 0, L),
    % sum(L, #=, N),
    % findall(I, between(0, N1, I), C),
    % scalar_product(C, L, #=, N),
    labeling([ff], L).

occurrences([], _, _).
occurrences([E|Ek], I, List) :-
    exactly(I, List, E), J is I+1,
    occurrences(Ek, J, List).

| ?- fdbg_on, magic(4, L).
```

A kimenet vége, az utolsó címkézési lépés után

```
exactly(0, [1,2,<x_3>,<x_4>],1)      x_3 = 0..3
                                   x_4 = 0..3
exactly(2, [1,2,<x_3>,<x_4>],<x_3>)  x_3 = 0..3 -> 1..3
                                   x_4 = 0..3
exactly(3, [1,2,<x_3>,<x_4>],<x_4>)  x_3 = 1..3
                                   x_4 = 0..3 -> 0..2
exactly(1, [1,2,<x_3>,<x_4>],2)      x_3 = 1..3
                                   x_4 = 0..2
exactly(2, [1,2,<x_3>,<x_4>],<x_3>)  x_3 = 1..3
                                   x_4 = 0..2
exactly(0, [1,2,<x_3>,<x_4>],1)      x_3 = 1..3
                                   x_4 = 0..2 -> {0}
                                   Constraint exited.
exactly(1, [1,2,<x_3>,0],2)          x_3 = 1..3 -> {1}
                                   Constraint exited.
exactly(2, [1,2,1,0],1)             Constraint exited.
exactly(3, [1,2,1,0],0)             Constraint exited.

L = [1,2,1,0] ?
```

Tartalom

5 A SICStus clp(FD) könyvtára

- CSP, mint háttér
- Alapvető korlátok
- Tükrözött és logikai korlátok
- Kiegészítések és segédeszközök
- Címkézés
- Felhasználó által definiált korlátok
- Kombinatorikus korlátok
- FDBG, a CLP(FD) nyomkövető csomag
- CLPFD esettanulmányok

Négyzetdarabolási esettanulmány

- Adott egy nagy négyzet oldalhosszúsága, pl.: `Limit = 10`.
- Adottak kis négyzetek oldalhosszúságai, pl.
`Sizes = [6,4,4,4,2,2,2,2]`
 (területösszegük megegyezik a nagy négyzet területével).
- A kis négyzetekkel pontosan le kell fedni a nagyot (meghatározandók a kis négyzetek koordinátái, ha a nagy négyzet bal alsó sarka: $(1,1)$), pl.:
`Xs = [1,7,7,1,5,5,7,9]`
`Ys = [1,1,5,7,7,9,9,9]`
- Források: Pascal van Hentenryck et al. tanulmányának 2. szekciója
<http://www.cs.brown.edu/publications/techreports/reports/CS-93-02.html>, illetve SICStus CLPFD példaprogram:
`library('clpfd/examples/squares')`.
- Az esettanulmány program-változatai, adatai, tesztkörnyezete megtalálható itt:
http://www.cs.bme.hu/~szeredi/nhlp/nlp_progs_sq.tgz

Négyzetdarabolási esettanulmány

Próba-adatok

Limit	Sizes
10	[6,4,4,4,2,2,2,2]
20	[9,8,8,7,5,4,4,4,4,4,3,3,3,2,2,1,1]
112	[50,42,37,35,33,29,27,25,24,19,18,17,16,15,11,9,8,7,6,4,2]
175	[81,64,56,55,51,43,39,38,35,33,31,30,29,20,18, 16,14,9,8,5,4,3,2,1]
503	[211,179,167,157,149,143,135,113,100,93,88,87, 67,62,50,34,33,27,25,23,22,19,16,15,4]

Megjegyzés: A több egyforma kis négyzet esetén jelentkező többszörös megoldások kiküszöbölésével nem foglalkozunk (mert alapvetően a különböző oldalhosszúságú kis négyzetekkel való lefedés a feladat, az egyforma kis négyzetek csak azért megengedettek, hogy egyszerűbb programváltozatokat is tesztelhessünk).

Négyzetdarabolási esettanulmány

A futási táblázatok értelmezése

- Az adatok: az **első megoldás** előállításához szükséges CPU idő másodpercben ill. a visszalépések száma.
- Futási környezet: Linux, Pentium III, 600 MHz.
- Időkorlát: 120 másodperc, túllépés esetén a mező üresen marad.

Prolog megoldás, Colmerauer clp(R) programja nyomán

```
% Square of size Limit is covered by distinct squares of size Ss
% with coordinates Xs and Ys.
squares_prolog(Ss, Limit, Xs, Ys) :-
    triples(Ss, Xs, Ys, SXYs), YO is Limit+1,
    XY0 = 1-YO, NLimit is -Limit,
    filled_hole([NLimit,Limit,Limit], _, XY0, SXYs, []).

% triples(Ss, Xs, Ys, SXYs): SXYs is a list of s(S,X,Y)-s.
triples([S|Ss], [X|Xs], [Y|Ys], [s(S,X,Y)|SXYs]) :-
    triples(Ss, Xs, Ys, SXYs).
triples([], [], [], []).

% filled_hole(L0, L, XY, SXYs0, SXYs): Hole in line L0 starting at
% point XY, filled with squares SXYs0-SXYs (difflist) gives line L.
filled_hole(L, L, _, SXYs, SXYs) :-
    L = [V|_], V >= 0, !.
filled_hole([V|HL], L, X0-Y0, SXYs00, SXYs) :-
    V < 0, Y1 is Y0+V, select(s(S,X0,Y1), SXYs00, SXYs0),
    placed_square(S, HL, L1), Y2 is Y1+S, X2 is X0+S,
    filled_hole(L1, L2, X2-Y2, SXYs0, SXYs1),
    V1 is V+S,
    filled_hole([V1,S|L2], L, X0-Y0, SXYs1, SXYs).
```

Prolog megoldás, Colmerauer clp(R) programja nyomán

```
% placed_square(S, HL, L): placing a square on HL horizontal line
% gives (vertical) line L.
placed_square(S, [H,0,H1|L], L1) :-
    S > H, !, H2 is H+H1,
    placed_square(S, [H2|L], L1).
placed_square(S, [H,V|L], [X|L]) :-
    S = H, !, X is V-S.
placed_square(S, [H|L], [X,Y|L]) :-
    S < H, X is -S, Y is H-S.
```

variáns	10	20	112	175	503
Prolog	0.000 0	0.87 271K	0.38 183K	5.72 2.6M	93.58 29M

Négyzetdarabolás: egyszerű clpfd megoldás

```
% A solution of the problem using speculative disjunction.
squares_spec(Sizes, Limit, Xs, Ys) :-
    generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Limit),
    state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Limit),
    state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
    labeling([], Xs), labeling([], Ys).

generate_coordinates([], [], [], _).
generate_coordinates([X|Xs], [Y|Ys], [S|Ss], Limit) :-
    Sd is Limit-S+1, domain([X,Y], 1, Sd),
    generate_coordinates(Xs, Ys, Ss, Limit).

% First square has center in SW quarter,
% under the positive diagonal
state_asymmetry([X|_], [Y|_], [D|_], Limit) :-
    UB is (Limit-D+2)>>1, X in 1..UB, Y #=< X.

% Set up pairwise no-overlap constraints.
state_no_overlap([], [], []).
state_no_overlap([X|Xs], [Y|Ys], [S|Ss]) :-
    state_no_overlap(X, Y, S, Xs, Ys, Ss),
    state_no_overlap(Xs, Ys, Ss).
```

Négyzetdarabolás: egyszerű clpfd megoldás

```
% Set up no-overlap constraints between <X,Y,S> and the rest.
state_no_overlap(X, Y, S, [X1|Xs], [Y1|Ys], [S1|Ss]) :-
    no_overlap_spec(X, Y, S, X1, Y1, S1),
    state_no_overlap(X, Y, S, Xs, Ys, Ss).
state_no_overlap(_, _, _, [], [], []).

% no_overlap_spec(X1,Y1,S1, X2,Y2,S2):
% SQ1 = <X1,Y1,S1> does not overlap with SQ2 = <X2,Y2,S2>
% Speculative solution.
no_overlap_spec(X1, _Y1, _S1, X2, _Y2, S2) :-
    X2+S2 #=< X1. % SQ1 is to the right of SQ2
no_overlap_spec(X1, _Y1, S1, X2, _Y2, _S2) :-
    X1+S1 #=< X2. % SQ1 is to the left of SQ2
no_overlap_spec(_X1, Y1, _S1, _X2, Y2, S2) :-
    Y2+S2 #=< Y1. % SQ1 is above SQ2
no_overlap_spec(_X1, Y1, S1, _X2, Y2, _S2) :-
    Y1+S1 #=< Y2. % SQ1 is below SQ2
```

variáns	10	20	112	175	503
spec	1.99	34K			

Diszjunktív korlátok kezelése

Példa: az $X+5 \leq Y \vee Y+5 \leq X$ korlát lehetséges megvalósításai

- Spekulatív változat


```
| ?- domain([X,Y], 0, 6), ( X+5 #=< Y ; Y+5 #=< X ).
    => X in 0..1, Y in 5..6 ? ;
    X in 5..6, Y in 0..1 ? ; no
```
- Tükrözés-alapú változat


```
| ?- ..., X+5 #=< Y #\ Y+5 #=< X. => X in 0..6, Y in 0..6
```
- Speciális módszerek: a diszjunkció kiküszöbölése az abs segítségével


```
| ?- ..., 'x+y=t tsz'(Y, D, X), abs(D) #>= 5.
    => X in (0..1)\/(5..6), Y in (0..1)\/(5..6) ?
```
- Speciális módszerek: a diszjunkció átírása indexikálissá


```
ix_disj(X, Y) +:
    X in \(\max(Y)-4..min(Y)+4), Y in \(\max(X)-4..min(X)+4).
| ?- ix_disj(X, Y).
    => X in (0..1)\/(5..6), Y in (0..1)\/(5..6) ?
```

Konstruktív diszjunkció – egy általános szűkítési módszer

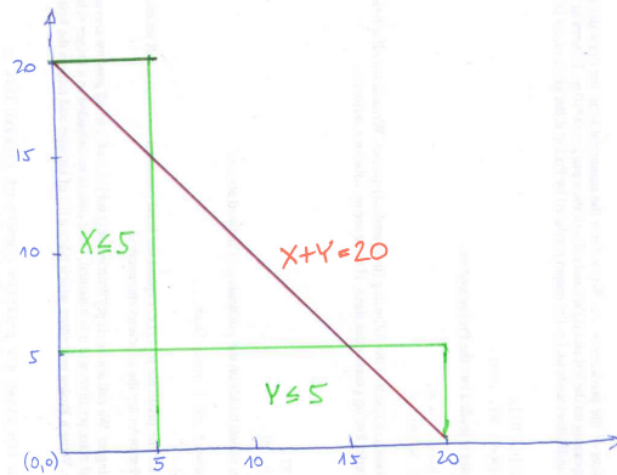
- A diszjunkció minden tagja esetén vizsgáljuk meg a hatását a tárra, jelöljük az így kapott „vagylagos” tárat S_1, \dots, S_n -nel.
- Minden változó a vagylagos tárukban kapott tartományok úniójára szűkíthető: $X \text{ in_set } \cup D(X, S_i)$.
- A Cs korlát-lista konstruktív diszjunkciója a Var változóra nézve:


```
cdisj(Cs, Var) :-
    empty_fdset(S0), cdisj(Cs, Var, S0, S), Var in_set S.
cdisj([Constraint|Cs], Var, Set0, Set) :-
    findall(S, (Constraint, fd_set(Var, S)), Sets),
    fdset_union([Set0|Sets], Set1),
    cdisj(Cs, Var, Set1, Set).
cdisj([], _, Set, Set).
| ?- domain([X,Y], 0, 6), cdisj([X+5 #=< Y, Y+5 #=< X], X).
    => X in(0..1)\/(5..6), Y in 0..6 ?
```
- A konstruktív diszjunkció erősebb lehet a tartomány-szűkítésnél, mert a korlátok kölcsönhatását is figyelembe tudja venni, pl. (lásd a köv. oldali ábrát is):


```
| ?- domain([X,Y], 0, 20), X+Y #= 20, cdisj([X#=<5, Y#=<5], X).
    => X in(0..5)\/(15..20), Y in(0..5)\/(15..20) ?
```

Konstruktív diszjunkció – korlátok kölcsönhatása

| ?- domain([X,Y], 0, 20), X+Y #= 20, cdisj([X#=<5,Y#=<5],X).
 ⇒ X in(0..5)\/(15..20), Y in(0..5)\/(15..20) ?



Konstruktív diszjunkció – „életből vett” példa

Egy gyilkos sudoku (Killer Sudoku) megoldása

Forrás: <https://youtu.be/IWZ2t-6nYq0?t=570>

4	68	68	245	1379	1379	245	1379	1379	245
		10							
10		8					10		
		8		9			9		
		8							
15	78	78		39	39				
	14	59							6
	59								

Négyzetdarabolás: diszjunktív korlátok

Számosság-alapú no_overlap változatok

```
no_overlap_card1(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) :-
    X1+S1 #=<= X2 #<=> B1,
    X2+S2 #=<= X1 #<=> B2,
    Y1+S1 #=<= Y2 #<=> B3,
    Y2+S2 #=<= Y1 #<=> B4,
    B1+B2+B3+B4 #>= 1.
```

```
no_overlap_card2(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) :-
    call( abs(2*(X1-X2)+(S1-S2)) #>= S1+S2 #\|
        abs(2*(Y1-Y2)+(S1-S2)) #>= S1+S2 ).
```

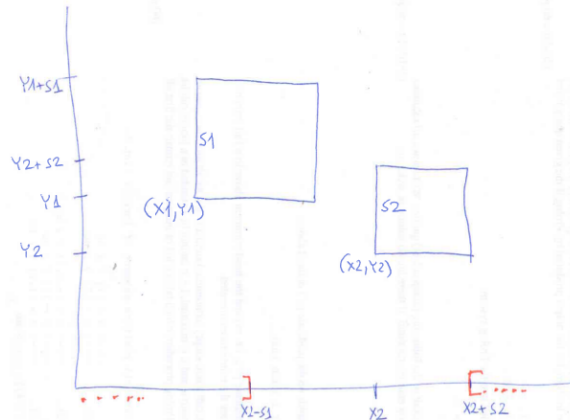
Négyzetdarabolás: diszjunktív korlátok

Indexikális no_overlap („gyenge” konstruktív diszjunkció)

- Alapgondolat: Ha két négyzet Y irányú vetületei biztosan átfedik egymást, akkor X irányú vetületeik diszjunktak kell legyenek, és fordítva.
- Az Y irányú vetületek átfedik egymást, ha mindkét négyzet felső széle magasabban van, mint a másik négyzet alsó széle: $Y1+S1 > Y2$ és $Y2+S2 > Y1$.
- Ha az $(Y1+S1..Y2) \setminus (Y2+S2..Y1)$ halmaz üres, akkor a fenti feltétel fennáll, tehát X irányban szűkíthetünk: $X1 \leq X2-S1$ vagy $X1 \geq X2+S2$, indexikálisként megfogalmazva:
 $X1 \text{ in } ((Y1+S1..Y2) \setminus (Y2+S2..Y1))?(inf..sup) \setminus \setminus (X2-S1+1..X2+S2-1)$

Négyzetdarabolás: diszjunktív korlátok

- Ha az $(Y1+S1..Y2) \setminus (Y2+S2..Y1)$ halmaz üres, akkor X irányban szűkíthetünk: $x1 \leq x2-S1$ vagy $x1 \geq x2+S2$, indexikálisként:
 $X1 \text{ in } ((Y1+S1..Y2) \setminus (Y2+S2..Y1)) ? (\text{inf}.. \text{sup}) \setminus \setminus (X2-S1+1..X2+S2-1)$



Négyzetdarabolás: diszjunktív korlátok

A korábbi „pucér változós” indexikális változóinak „felöltöztetése”:

```
no_overlap_ix(X1, Y1, S1, X2, Y2, S2) +:
%   ha Y irányú átfedés van, azaz
%   ha min(Y1)+S1 > max(Y2) és min(Y2)+S2 > max(Y1) ...
X1 in ((min(Y1)+S1..max(Y2)) \setminus (min(Y2)+S2..max(Y1)))
%   ... akkor X irányban nincs átfedés:
? (inf..sup) \setminus \setminus (max(X2)-(S1-1) .. min(X2)+(S2-1)),
X2 in ((min(Y1)+S1..max(Y2)) \setminus (min(Y2)+S2..max(Y1)))
? (inf..sup) \setminus \setminus (max(X1)-(S2-1) .. min(X1)+(S1-1)),
Y1 in ((min(X1)+S1..max(X2)) \setminus (min(X2)+S2..max(X1)))
? (inf..sup) \setminus \setminus (max(Y2)-(S1-1) .. min(Y2)+(S2-1)),
Y2 in ((min(X1)+S1..max(X2)) \setminus (min(X2)+S2..max(X1)))
? (inf..sup) \setminus \setminus (max(Y1)-(S2-1) .. min(Y1)+(S1-1)).
```

variáns	10	20	112	175	503
card1	0.07	141			
card2	0.07	141			
ix	0.01	141			

Négyzetdarabolás: kapacitás-korlátok, címkézés

Nagyobb példák sikeres futtatásához szükség van további programelemekre.

- Címkézés:** tegyük paraméterezhetővé, keressük a feladathoz illő címkézést!
 - „Tetrisz” elv: alulról felfelé töltjük fel a kis négyzeteket.
 - Ennek az elvnek egy jó megvalósítása a `[min,step]` opciójú címkézés.
- Redundáns korlátok:** A jelenlegi program nem elég okos: pl. amikor a nagy négyzet alja betelt, nem hagyja ki az Y változók tartományából az 1 értéket. Az ún. kapacitás-korlátokkal ez megvalósítható: ha összeadjuk azon kis négyzetek oldalhosszát, amelyek elmetszenek egy $X=1, X=2, \dots, Y=1, Y=2, \dots$ vonalat, akkor a nagy négyzet oldalhosszát kell kapnunk (a kis négyzeteket itt alulról és balról zártnak, felülről és jobbról nyílnak tekintjük), azaz pl. Y irányban:

$$\sum \{S_i | p \in [Y_i, Y_i + S_i]\} = \text{Limit} \quad (\forall p \in 1.. \text{Limit}-1)$$

Négyzetdarabolás: kapacitás-korlátok, címkézés

$$\sum \{S_i | p \in [Y_i, Y_i + S_i]\} = \text{Limit} \quad (\forall p \in 1.. \text{Limit}-1)$$



Limit = 10
 Sizes = [6, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2]

6+4=10

4+4+2=10

Négyzetdarabolás: kapacitás-korlátok, címkézés

```
squares_cap(Lab, Sizes, Limit, Xs, Ys) :-
    generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Limit),
    state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Limit),
    state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
    state_capacity(1, Xs, Sizes, Limit),
    state_capacity(1, Ys, Sizes, Limit),
    labeling(Lab, Xs), labeling(Lab, Ys).

% State capacity constraint for coordinates Cs, problem
% Sizes/Limit, for each position Pos..Limit.
state_capacity(Pos, Limit, Cs, Sizes) :-
    Pos =< Limit, !, accumulate(Cs, Sizes, Pos, Bs),
    scalar_product(Sizes, Bs, #=, Limit),
    Pos1 is Pos+1, state_capacity(Pos1, Limit, Cs, Sizes).
state_capacity(_Pos, _Limit, _, _).

% accumulate(C, S, Pos, B): B is a list of same length as C and S,
% composed of Boole values Bi, Bi = 1 ⇔ Pos ∈ [Ci, Ci + Si).
accumulate([], [], _, []).
accumulate([Ci|Cs], [Si|Ss], Pos, [Bi|Bs]) :-
    Crutch is Pos-Si+1, Ci in Crutch .. Pos #<=> Bi,
    accumulate(Cs, Ss, Pos, Bs).
```

Négyzetdarabolás: kapacitás-korlátok, címkézés

variáns, címkézés	10	20	112	175	503
[]-ix, [min]	0.01 84				
cap-ix, []	0.01 0	0.07 18			
cap-ix, [min]	0.01 0	0.06 0	1.96 109	3.74 105	20.32 405
cap-spec, [min]	2.31 34K				
cap-card1, [min]	0.04 0	0.24 0	3.51 109	4.86 105	22.63 405
cap-card2, [min]	0.04 0	0.34 0	2.41 109	4.48 105	21.83 405

Négyzetdarabolás: könyvtári globális korlátok

Ütemezési és lefedési korlátok használata

- A négyzetdarabolás mint ütemezési probléma: alkalmazzuk a cumulative korlátot mindkét tengely irányában.
- A négyzetdarabolás mint diszjunkt téglalapok problémája: alkalmazzuk a disjoint2 korlátot (ekkor nem feltétlenül kell no_overlap).

Négyzetdarabolás: könyvtári globális korlátok

```
squares_cum(Lab, Opts, Sizes, Limit, Xs, Ys) :-
    generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Limit),
    state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Limit),
    state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes),
    cumulative(Xs, Sizes, Sizes, Limit, Opts),
    cumulative(Ys, Sizes, Sizes, Limit, Opts),
    labeling(Lab, Xs), labeling(Lab, Ys).

squares_dis(Lab, Opts, Sizes, Limit, Xs, Ys) :-
    generate_coordinates(Xs, Ys, Sizes, Limit),
    state_asymmetry(Xs, Ys, Sizes, Limit),
    state_no_overlap(Xs, Ys, Sizes), % ez elmarad a "none"
                                     % variáns esetén
    disjoint2_data(Xs, Ys, Sizes, Rects),
    disjoint2(Rects, Opts),
    labeling(Lab, Xs), labeling(Lab, Ys).

disjoint2_data([], [], [], []).
disjoint2_data([X|Xs], [Y|Ys], [S|Ss], [r(X,S,Y,S)|Rects]) :-
    disjoint2_data(Xs, Ys, Ss, Rects).
```

Globális korlátok hatékonyságának összehasonlítása

Címkézés: [min].

Rövidítések: e = edge_finder(true), g = global(true)

variáns	10	20	112	175	503
cum-ix	0.00 0	0.02 0			
cum(e)-ix	0.01 0	0.01 0	0.18 139	0.12 67	0.52 421
dis-none	0.01 52				
dis(g)-none	0.00 0	0.01 0	0.73 282	0.41 133	2.55 576
dis(g)-ix	0.00 0	0.02 0	0.93 282	0.53 133	2.95 576

Mintamegoldás: http://www.cs.bme.hu/~szeredi/nlp/hf_99_torpedo.tgz

A feladat

- Téglalap alakú táblázat.
- 1xN-es hajókat kell elhelyezni benne úgy, hogy még átlósan se érintkezzenek, pl. 1, 2, 3 és 4 hosszúakat.
- A hajók különböző színűek lehetnek.
 - Minden szín esetén adott:
 - minden hajóhosszhoz: az adott színű és hosszú hajók száma;
 - minden sorra és oszlopra: az adott színű hajó-darabok száma;
 - ismert hajó-darabok a táblázat mezőiben.
- Színfüggetlenül adott: ismert torpedó-mentes (tenger) mezők

Egy online Battleship feladványmegoldó (csak egyféle színű hajókkal):

<https://www.conceptispuzzles.com/index.aspx?uri=puzzle/battleships>

Példa

Két szín, mindkettőből 1 darab egyes és 1 darab kettes hajó. Ismert mezők:

1. sor 1. mezője tenger, 1. sor 3. mezője egy kettes hajó tatja (jobb vége).

A feladat:

```
1 2 3 4 5 <-- oszlopszám
0 1 1 1 0 <-- 1. oszlopössz.
```

```
1 2 = r 0
2 0 1
3 0 1
4 1 1
```

```
----- sorösszegek
2 0 0 0 1 <-- 2. oszlopössz.
```

Jelölések:

```
% Ismert mezők, > 1 hossz: (1. szín) (2. szín) (tenger)
% (irányított hajók) u U
% l m r L M R
% d D
% Ismert mezők (1 hosszúak): o O =
% Kikövetkeztetett mezők: * # :
```

A megoldás:

```
1 2 3 4 5
0 1 1 1 0
```

```
1 2 = * r : : 0
2 0 : : : : # 1
3 0 # : : : : 1
4 1 # : : * : 1
```

```
2 0 0 0 1
```

Torpedó – modellezés

Mik legyenek a korlát-változók?

- Minden hajóhoz: irány (vízsz. vagy függ.) és a kezdőpont koordinátái — kevés változó, de szimmetria problémák (pl. azonos méretű hajók sorrendje), bonyolultabb korlátok, sok diszjunktív korlát (pl. vízsz. ill. függ. elhelyezés esetén a hajó más-más mezőket fed le).
- Minden mezőhöz: mi található ott: hajó-darab vagy tenger — sok változó, egyszerűbb korlátok; **ez a választott megoldás.**

Milyen értékkészletet adjunk a korlát-változóknak (mezőknek)?

- Adott színű hajó-darab vagy tenger — egyszerű kódolás, de információvesztés az ismert mezőknél.
- Megkülönböztetjük a hajó-darabokat:
 - az előre kitöltött mezőknek megfelelő darabok (u,l,m,r,d,o) — diszjunktív korlátok (pl. ugyanaz a betű többféle hajó része lehet);
 - részletesebb bontás: a mezőket megkülönböztetjük a hajó hossza, iránya, a darab hajón belüli pozíciója szerint, pl. egy 4 hosszú vízszintes hajó balról 3. darabja; **ez a választott megoldás.** A megoldás jellemzője: ha egy mező egy nem-tenger értéket kap, akkor a teljes hajó meghatározottá válik.

Torpedó – modellezés

Hány változóval ábrázoljunk egy mezőt?

- Külön változó mutatja a szín, hossz, irány és pozíció értékét — egyszerű kódolás, a szűkítés gyenge.
- Egyetlen változó mutatja az összes jellemzőt — bonyolult kódolás, hatékonyabb szűkítés; **ez a választott megoldás.**

Torpedó mintamegoldás – változók

- Minden mezőnek egy változó felel meg.
- Az értékek kódolási elvei (max címkézéshez igazítva)
 - az irányított hajók orra (1 és u) kapja a legmagasabb kódokat,
 - ezen belül a hosszabbak kapják a nagyobb kódokat
 - adott hossz esetén az irány és a szín sorrendje nem fontos
 - az irányított hajók nem-orr elemeinek kódolása nem lényeges (címkézéskor az orr-elemek helyettesítődnek be)
 - az egy-hosszú hajók (hajódarabok) kódja a legalacsonyabb
 - a tenger kódja minden hajónál alacsonyabb
- Példa-kódolás: 1 szín, max 3 hosszú hajók, h_{ij} = horizontális (vízszintes), i hosszú hajó j -edik darabja, v_{ij} = vertikális (függőleges) hajó megfelelő darabja, stb. A kód-kiosztás:

```

0:          tenger
1:          h11 = v11      % 1-hosszú hajó
2..4       v33  h22  h32   % nem-orr-elemek
5..7       v32  v22  h33   % nem-orr-elemek
8..9       h21  v21       % orr-elemek
10..11     h31  v31       % orr-elemek

```

Torpedó mintamegoldás – változók

A kódoláshoz kapcsolódó segéd-korlátok

- `coded_field_neighbour`(Dir, CF0, CF1): CF0 kódolt mező Dir irányú szomszédja CF1, ahol Dir lehet horiz, vert, diag. Például
| ?- coded_field_neighbour(horiz, 0, R). ->>> R in \{3,4,7}.
- `group_count`(Group, CFs, Count, Env): a Group csoportba tartozó elemek száma a CFs listában Count, ahol a futási környezet Env. Itt Group például lehet `all(Clr)`: az összes Clr színű hajódarab. Ez a `count/4` eljárás kiterjesztése: nem egyetlen szám, hanem egy számhalmaz előfordulásait számoljuk meg.

Torpedó mintamegoldás – korlátok

Alapvető korlátok

- Az ismert mezők megfelelő csoportra való megszorítása (X in ...).
- Színenként az adott sor- és oszlopszámlálók előírása (`group_count`).
- A hajóorr-darabok megszámlálásával az adott hajófajta darabszámának biztosítása (`group_count`, minden színre, minden hajófajtára).
- A vízszintes, függőleges és átlós irányú szomszédos mezőkre vonatkozó korlátok biztosítása (`coded_field_neighbour`).

Segédváltozók – korlátok összekapcsolása

- A 3. korlát felírásában a részösszegekre érdemes segédváltozókat bevezetni (pl. $A+B+C \# = 2$, $A+B+D \# = 2$ helyett $A+B \# = S$, $S+C \# = 2$, $S+D \# = 2$ jobban tud szűkíteni, mert az s változón keresztül a két összegkorlát „kommunikál”).
- Jelölje sor_s^K ill. $oszl_s^L$ az s hajódarab előfordulási számát a K -edik sorban, ill. az L -edik oszlopban. A hajók számolásához a sor_{h11}^K és $oszl_{v11}^L$ mennyiségekre segédváltozókat vezetünk be, ezekkel a 3. korlát:
az I hosszú hajók száma = $\sum_K sor_{h11}^K + \sum_L oszl_{v11}^L$ ($I > 1$)
az 1 hosszú hajók száma = $\sum_K sor_{h11}^K$

Torpedó mintamegoldás – korlátok

Redundáns korlátok (alapértelmezésben mind bekapcsolva)

- 1 `count_ships_occs`: sorösszegek alternatív kiszámolása (vö. a mágikus sorozatok megoldásában a skalárszorzat redundáns korláttal):

$$\text{a } K. \text{ sorbeli darabok száma} = \sum_{I \leq \text{hosszak}} I * \text{sor}_{hI1}^K + \sum_{1 < I \leq \text{hosszak}, J \leq I} \text{sor}_{vIJ}^K$$

Analóg módon az oszlopösszegekre is.

(Ennek a korlátnak a hatására „veszi észre” a program, hogy ha pl. egy sorösszeg 3, akkor nem lehet a sorban 3 eleműnél hosszabb hajó.)

- 2 `count_ones_columns`: az egy hosszú darabok számát az oszloponkénti előfordulások összegeként is meghatározzuk.
- 3 `count_emptyies`: minden sorra és oszlopra a tenger-mezők számát is előírjuk (a sorhosszból kivonva az összes — különböző színű — hajódarab összegét).

Torpedó mintamegoldás – címkézés

```
% filter_count_vars(Vars0, Vars, Cnt0, Cnt): Vars0 megszűrve
% Vars-t adja. A megszűrt változók száma Cnt-Cnt0.
filter_count_vars([], [], Cnt, Cnt).
filter_count_vars([V|Vs], Fs, Cnt0, Cnt) :-
    integer(V), !, filter_count_vars(Vs, Fs, Cnt0, Cnt).
filter_count_vars([V|Vs], [V|Fs], Cnt0, Cnt) :-
    ( fd_min(V, Min), Min > 0 -> Cnt1 = Cnt0
    ; \+ (V = 0) -> V #\= 0, Cnt1 is Cnt0+1
    ; Cnt1 = Cnt0
    ), filter_count_vars(Vs, Fs, Cnt1, Cnt).
```

Torpedó mintamegoldás – címkézés

Címkézési variánsok — `label(Variáns)` opciók

- `plain`: `labeling([max,down], Mezők)`.
- `max_dual`: a négyzetkírákhoz hasonlóan a legmagasabb értékeket próbálja a változóknak értékül adni. Ez szűkítő hatásban (és így a keresési fa szerkezetében) azonos a `plain` variánssal.
- `ships`: speciális címkézés, minden hosszra, a legnagyobbtól kezdve, minden színre az adott színű és hosszú hajókat sorra elhelyezi (alapértelmezés).

Címkézés közbeni szűrés – az ún. *borotválás*

- a konstruktív diszjunkció egy egyszerű formája
- sorra az összes mezőt megpróbáljuk „tenger”-re helyettesíteni, ha ez azonnal meghiúsulást okoz, akkor ott hajó-darab van
- a szűrést minden szín címkézése előtt megismételjük
- variánsok — `filter(VariánsLista)` opció, ahol a lista eleme lehet:
 - `off`: nincs szűrés
 - `on`: egyszeres szűrés van (alapértelmezés)
 - `repetitive`: mindaddig ismételtlen szűrünk, amíg az újabb korlátokat eredményez

Torpedó – korlát-variánsok

Korlátok megvalósítási variánsai

- `relation(R)`, `R = clause` vagy `R = indexical` (alapértelmezés): a vízszintes és függőleges szomszédsági relációt a `relation/3` meghívásával, vagy indexikálisként való fordításával valósítjuk meg.
- `diag(D)`: az átlós szomszédsági reláció megvalósítása, `D =`
 - `reif` — reifikációs alapon: `CF1 #= 0 #\ / CF2 #= 0`
 - `ind_arith` — aritmetikát használó indexikálissal: `diagonal_neighbour_arith(CF1, CF2) +: CF1 in 0 .. (1000-(min(CF2)/>1000)*1000), ...`
 - `ind_cond` (alapértelmezés) — feltételes indexikálissal: `diagonal_neighbour_cond(CF1, CF2) +: CF1 in (min(CF2)..0) ? (inf..sup) \ / 0, ...`

Torpedó – eredmények (összes megoldás, DEC Alpha 433 MHz)

Opciók/példa	fules2a		fules3		fules_clean	
1. sima	51.437	10178	253.1	55157	1085.7	260K
Redundáns korlátok						
2. = 1 + count_ships_occs	16.218	1910	105.6	13209	395.2	52398
3. = 2 + count_ones_columns	16.175	1861	105.0	12797	386.4	50181
4. = 3 + count_emptyies	17.915	1771	107.2	11273	381.7	42417
Címkezési variánsok						
5. = 4 + label(max_dual)	18.296	1771	106.3	11273	379.8	42417
6. = 4 + label(ships)	17.153	1708	105.7	11236	367.8	41891
Borotválás						
7. = 6 + filter([repetitive])	10.517	313	64.3	2534	206.1	10740
8. = 6 + filter([on])	9.549	332	59.0	2811	199.7	12004
Megvalósítási variánsok						
9. = 8 + relation(indexical)	8.426	332	54.0	2811	180.8	12004
10. = 9 + diag(ind_arith)	7.855	332	50.2	2811	167.7	12004
11. = 9 + diag(ind_cond)	7.819	332	50.1	2811	166.2	12004
12. = 11 - count_emptyies	6.750	350	47.5	3248	166.2	14233

Jelmagyarázat:

```
1. sima = [-count_ships_occs, -count_ones_columns, -count_emptyies,
          label(plain), filter([off]), relation(clause), diag(reif)]
```

```
11. = alapértelmezés
```

Dominó

Mintamegoldás: http://www.cs.bme.hu/~szeredi/nlp/hf_00s_domino.tgz

A feladat

- Adott egy $(n + 1) \times (n + 2)$ méretű téglalap, amelyen egy teljes n -es dominókészlet összes elemét elhelyeztük, majd a határait eltávolítottuk. A feladat a határok helyreállítása.
- A dominókészlet elemei az $\{\langle i, j \rangle \mid 0 \leq i \leq j \leq n\}$ számpároknak felelnek meg. A kiinduló adat tehát egy $0..n$ intervallumbeli számokból álló $(n + 1) \times (n + 2)$ -es mátrix, amelynek elemei azt mutatják meg, hogy az adott mezőn hány pöttyöt tartalmazó féldominó van.
- A megoldásban a téglalap minden mezőjéről meg kell mondani, hogy azt egy dominó északi (n), nyugati (w), déli (s), vagy keleti (e) fele fedi le.

Minta adat-csoportok

- base — 16 könnyű alap-feladat $n = 1-25$ közötti méretben.
- easy — 24 közép-nehez feladat, többségük $n = 15-25$ méretben.
- diff — 21 nehéz feladat 28-as, és egy 30-as méretben.
- hard — egy nagyon nehéz feladat 28-as méretben.

Dominó – példa

```
% Egy feladat (n=3):
```

```
1  3  0  1  2
3  2  0  1  3
3  3  0  0  1
2  2  1  2  0
```

```
% Bemenő adatformátum:
```

```
[[1, 3, 0, 1, 2],
 [3, 2, 0, 1, 3],
 [3, 3, 0, 0, 1],
 [2, 2, 1, 2, 0]]
```

```
% Az (egyetlen) megoldás:
```

```
-----
| 1 | 3  0 | 1 | 2 |
|   |-----|   |   |
| 3 | 2  0 | 1 | 3 |
|-----|---|
| 3  3 | 0  0 | 1 |
|-----|-----|   |
| 2  2 | 1  2 | 0 |
-----
```

```
% A megoldás Prolog alakja:
```

```
[[n, w, e, n, n],
 [s, w, e, s, s],
 [w, e, w, e, n],
 [w, e, w, e, s]]
```

Dominó – modellezés

Mik legyenek a korlát-változók?

- Minden mezőhöz egy ún. *irány-változót* rendelünk, amely a lefedő féldominó irányát jelzi (ez az, ami a megoldásban is szerepel) — körülményes a dominók egyszeri felhasználását biztosítani.
- Minden dominóhoz egy ún. *dominó-változót* rendelünk, amelynek értéke megmondja, hová kerül az adott dominó — körülményes a dominók át nem fedését biztosítani.
- Mezőkhöz is és dominókhöz is rendelünk változókat (a.+b.), **ez az 1. választott megoldás.**
- A mezők közötti választóvonalakhoz rendelünk egy 0-1 értékű ún. *határ-változót* (az a. megoldás egy variánsa), **ez a 2. választott megoldás.**

Dominó – modellezés

Milyen legyen a korlát-változók értékkészlete?

- Az irány-változók értékkészlete a megoldás-mátrixbeli n , w , s , e konstansok tetszőleges numerikus kódolása lehet.
- A dominó-változók „természetes” értéke lehet a $\langle sor, oszlop, lehelyezési_irány \rangle$ hármas valamilyen kódolása. Elegendő azonban az egyes lerakási helyeket megszámozni; ha egy dominót l különböző módon lehet lerakni, akkor az $1..l$ számokkal (**ez a választott megoldás**).
Például a 0/2-es dominó lerakható a $\langle 2,2, vízsz \rangle$, $\langle 3,4, függ \rangle$ és $\langle 4,4, vízsz \rangle$ helyekre. A neki megfeleltetett változó értéke $1..3$ lehet, rendre ezeket az elhelyezéseket jelentve.
- A határ-változók 1 értékének „természetes” jelentése lehet az, hogy az adott határvonalat be kell húzni. A választott megoldás ennek a negáltja: az 1 érték azt jelenti, hogy az adott vonal nincs behúzva, azaz egy dominó középvonala. (Ettől az összes korlát $A+B+\dots \neq 1$ alakú lesz.)

Dominó – 1. változat

Változók, korlátok

- Minden mezőhöz egy irány-változó (I_{yx} in $1..4 \equiv \{n, w, s, e\}$), minden dominóhoz egy dominó-változó (D_{ij} , $0 \leq i \leq j \leq n$) tartozik.
- Szomszédsági korlát: két szomszédos irány-változó kapcsolata, pl. $I_{14}\# = n \# \Leftrightarrow I_{24}\# = s$, $I_{14}\# = w \# \Leftrightarrow I_{15}\# = e$, stb.
- Dominó-korlát: egy dominó-elhelyezésben a dominó-változó és a lerakás bal vagy felső mezőjének irány-változója közötti kapcsolat. A korábbi példában pl. $D_{02}\# = 1 \# \Leftrightarrow I_{22}\# = w$, $D_{02}\# = 2 \# \Leftrightarrow I_{34}\# = n$, $D_{02}\# = 3 \# \Leftrightarrow I_{44}\# = w$

Dominó – 1. változat

Algoritmus-változatok

- $csakkor = Cs$ — a $csakkor_egyenlo(X, C, Y, D)$ korlát megvalósítása:
 - $Cs = reif$: reifikációval ($X\# = C\# \Leftrightarrow Y\# = D$)
 - $Cs = ind1$: az $'x=c \Rightarrow y=d'$ FD-predikátum kétszeri hívásával,
 - $Cs = ind2$: az $'x=c \Leftrightarrow y=d'$ FD-predikátum hívásával.
- $valt = V$, $label = L0pciok$ — Az $L0pciok$ opciókkal és a V által kijelölt változókkal ($V = irány; domino$) hívjuk a $labeling/2$ címkéző eljárást.
- $szur = Sz$, $szurtek = L$ — Ha $szur \neq ki$, akkor az irány-változókat borotváljuk, sorra megpróbáljuk az L elemeire behelyettesíteni, és ha ez megüszülést okoz, akkor az adott elemet kivesszük a változó tartományából. $szur$ lehet: $e1ott$ — csak a címkézés előtt szűrünk, N — minden N . változó címkézése után szűrünk. L alapértelmezése $[w, n]$.

Dominó – 1. változat

A $csakkor_egyenlo$ megvalósításában használt FD-predikátumok

```
'x=c=>y=d'(X, C, Y, D) +:
  X in (dom(Y) /\ {D}) ? (inf..sup) \/ \({C}),
  Y in ({X} /\ \({C})) ? (inf..sup) \/ {D}.
```

```
'x=c<=>y=d'(X, C, Y, D) +:
  X in ((dom(Y) /\ {D}) ? (inf..sup) \/ \({C})) /\
  ((dom(Y) /\ \({D})) ? (inf..sup) \/ {C}),
  Y in ((dom(X) /\ {C}) ? (inf..sup) \/ \({D})) /\
  ((dom(X) /\ \({C})) ? (inf..sup) \/ {D}).
```

Dominó – 2. változat

Változók, korlátok

- Minden mező keleti ill. déli határvonalához egy-egy határ-változó tartozik (Eyx ill. Syx). A határ-változó akkor és csak akkor 1, ha az adott vonal egy dominó középvonala. A táblázat külső határai 0 értékűek (behúzott vonalak).
- Szomszédási korlát: minden mező négy oldala közül pontosan egy lesz egy dominó középvonala, tehát pl. a (2, 4) koordinátájú dominó-mező esetén $\text{sum}([S14, E23, S24, E24])$, $\# = 1$.
- Lerakási korlát: egy dominó összes lerakási lehetőségeit tekintjük, ezek középvonalai közül pontosan egy lesz 1, így a példabeli $\langle 0, 2 \rangle$ dominóra: $\text{sum}([E22, S34, E44])$, $\# = 1$.

Dominó – 2. változat

Algoritmus-változatok

- $\text{osszeg} = \text{Ossz}$ — a lista_osszege_1 feltétel megvalósítása:
 - $\text{Ossz} = \text{ari}(N)$: N-nél nem hosszabb listákra aritmetikai korláttal,
 - $\text{Ossz} = \text{ind}(N)$: N-nél nem hosszabb listákra FD-predikátummal,
 - egyébként (N-nél hosszabb, vagy $\text{Ossz} = \text{sum}$): a $\text{sum}/3$ korláttal,
- $\text{szomsz} = \text{Ossz}$, $\text{lerak} = \text{Ossz}$ — a fenti viselkedést írja elő a szomszédási ill. a lerakási korlátokra külön-külön.
- $\text{label} = \text{LOpcio}$ — Az LOpcio opciókkal hívjuk a labeling/2 eljárást.
- $\text{szur} = \text{Sz}$, $\text{szurtek} = \text{L}$ — mint az 1. dominó-változatban. L alapértelmezése [1]. ([0, 1] nem ad lényegesen erősebb szűrést.)

A lista_osszege_1 megvalósítása FD-predikátummal

$\text{osszege1}(A, B) +:$ $A+B \# = 1.$
 $\text{osszege1}(A, B, C) +:$ $A+B+C \# = 1.$
 $\text{osszege1}(A, B, C, D) +:$ $A+B+C+D \# = 1.$
 (...)

Dominó – eredmények

Összes megoldás előállítás DEC Alpha 433 MHz gépen

- A táblázatban levő adatpárok jelentése: futási idő (mp) ill. visszalépések száma.
- A dőlt betűs sorok jelentik a viszonyítási alapot.
- A felkiáltójel (!) jelzi, hogy időtűllépés (7200mp) is volt a tesztesetek között.
- A keretezés a legjobb időt ill. visszalépés-számot jelzi.

Dominó – eredmények

Opciók/példa	base	easy	diff	hard
1. változat, csakkor=ind1, valt=domino, label=[], szur=2, szurtek=[1, 2]				
szur=2	5.44	26.6	4001.7	1162.9
szur=1, label=[ff]	5.87	27.6	3900.6	554.4
szur=2, label=[ff]	5.48	25.8	3222.9	446.9
szur=3, label=[ff]	5.36	25.7	3232.6	429.3
label=[ffc]	5.49	23.7	19885.8	3902.0
csakkor=ind2	5.14	26.4	4250.9	1233.0
csakkor=reif	6.87	33.5	4573.2	1320.2
szurtek=[1]	4.98	34.1	6375.0	1976.5
szur=elott	5.09	25.1		
szur=ki	38.6	9K		
1. változat, csakkor=ind1, valt=irany, label=[], szur=2, szurtek=[1, 2]				
label=[]	5.39	23.4	2138.1	3362.9
label=[ff]	5.40	23.4	2137.9	3376.5
label=[ffc]	5.42	24.1	115036.1	17199.7
szurtek=[1]	4.94	29.4	3240.2	6077.2
2. változat, osszeg=ind(5), label=[], szur=2, szurtek=[1]				
szur=2	2.10	11.5	1045.9	1607.0
szur=1	2.28	11.9	1294.7	1977.9
szur=3	2.04	11.5	1051.2	1583.1
osszeg=ind(4)	2.18	11.9	1152.7	1768.0
osszeg=ind(6)	2.13	11.9	1149.2	1765.5
osszeg=sum	2.96	15.8	1409.3	2263.1
osszeg=ari(5)	2.97	15.9	1462.7	2257.8
szurtek=[0]	1.86	15.1	2104.6	3211.3
szurtek=[0, 1]	2.00	12.3	1182.2	1823.7
label=[ff]	2.12	11.7	1132.3	1735.2
label=[ffc]	2.14	12.4	2189.5	2672.1
2. változat, szur=ki, label=[], rövidítések: l => lerak sz => szomsz				
osszeg=ind(5)	3.31	57.0		
l=ind(5), sz=sum	4.61	78.6		
l=sum, sz=ind(5)	3.97	62.8		
osszeg=sum	4.57	74.8		

VI. rész

CHR – Constraint Handling Rules

- 1 Prolog alapok
- 2 A SICStus clp(Q,R) könyvtárai
- 3 A SICStus clp(B) könyvtára
- 4 A CLP elméleti háttere
- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
- 6 CHR – Constraint Handling Rules**
- 7 A Mercury LP megvalósítás

CHR – Constraint Handling Rules

Jellemzők:

- Deklaratív nyelv-kiterjesztés
- Determinisztikus kifejezés-átíráson alapul
- Prolog, CLP, Haskell, vagy Java *gazda*-megvalósításra épül
- Általános, szimbolikus (nem numerikus) **felhasználói** korlátok írására alkalmas
- Nincs (beépített) konzisztencia-vizsgálat – minden korlát bemegy a tárba.
- Fő szerző: Thom Früwirth (ECRC, LMU München, Ulm Uni.).
- Honlap: <http://constraint-handling-rules.org/>

Alap-példa

```
:- use_module(library(chr)).

:- chr_constraint leq/2.
% X leq Y means variable X is less-or-equal to variable Y

:- op(500, xfx, leq).

reflexivity @ X leq Y <=> X = Y | true.
antisymmetry @ X leq Y , Y leq X <=> X=Y.
idempotence @ X leq Y X leq Y <=> true.
transitivity @ X leq Y , Y leq Z ==> X leq Z.

| ?- X leq Y, Y leq Z, Z leq X.

% X leq Y, Y leq Z ----> (transitivity) X leq Z
% X leq Z, Z leq X <----> (antisymmetry) X = Z
% Z leq Y, Y leq Z <----> (antisymmetry) Z = Y

Y = X, Z = X ?
```

A CHR szabályok

Szabályfajták

- Egyszerűsítés (Simplification):
 $H_1, \dots, H_i \Leftrightarrow G_1, \dots, G_j \mid B_1, \dots, B_k.$
- Propagáció (Propagation):
 $H_1, \dots, H_i \Rightarrow G_1, \dots, G_j \mid B_1, \dots, B_k.$
- Egypagáció (Simpagation):
 $H_1, \dots, H_l \setminus H_{l+1}, \dots, H_i \Leftrightarrow G_1, \dots, G_j \mid B_1, \dots, B_k.$

A szabályok részei

- multi-fej (multi-head): H_1, \dots, H_i , ahol H_m CHR-korlátok;
- őr (guard): G_1, \dots, G_j , ahol G_m gazda-korlátok;
- törzs (body), B_1, \dots, B_k , ahol B_m CHR- vagy gazda-korlátok;
- itt mindvégig $i > 0, j \geq 0, k \geq 0, l > 0$.

A CHR szabályok

A szabályok jelentése

- Egyszerűsítés: ha az ő igaz, akkor a (multi-)fej és a törzs ekvivalens.
- Propagáció: ha az ő igaz, akkor a (multi-)fejből következik a törzs.
- Egypagáció: visszavezethető a fentiekre, mert:

$$\text{Heads1} \setminus \text{Heads2} \Leftrightarrow \text{Body}$$
 ugyanazt jelenti, mint

$$\text{Heads1}, \text{Heads2} \Leftrightarrow \text{Heads1}, \text{Body},$$
 csak sokkal hatékonyabb.

A CHR szabályok végrehajtása

Korlátok aktiválása (meghívása vagy fölébresztése)

- Az aktív korláthoz sorra **próbáljuk** az összes szabályt, amelynek fejében előfordul,
- mindegyik fejre **illesztjük** a korlátot (egyirányú egyesítés, hívásbeli változó nem kaphat értéket),
- többfejű szabályok esetén a korlát-tárban keresünk megfelelő (illeszthető) **partner**-korlátot,
- sikeres illesztés után végrehajtjuk az ő-részt, ha ez is sikeres, a szabály **tüzel**, különben folytatjuk a próbálkozást a következő szabállyal.
- A tüzelés abból áll, hogy (egyszerűsítés vagy egypagáció esetén) kivesszük a tárból a kijelölt korlátokat, majd minden esetben végrehajtjuk a törzset.
- Ha ezzel az aktív korlátot nem hagytuk el a tárból, folytatjuk a rá vonatkozó próbálkozást a következő szabállyal.
- Amikor az összes szabályt kipróbáltuk, akkor a korlátot **elaltatjuk**, azaz visszatesszük a tárba (az alvó passzív korlátok közé).

A CHR szabályok végrehajtása

A végrehajtás jellemzői

- A korlátok három állapota: aktív (legfeljebb egy), aktiválható passzív, alvó passzív.
- A korlát akkor válik aktiválhatóvá, amikor egyik változóját **megérintik**, azaz egyesítik egy tőle különböző kifejezéssel.
- Minden alkalommal, amikor egy korlát aktívvá válik, az összes rá vonatkozó szabályt végigpróbáljuk.
- A futás akkor fejeződik be, amikor nincs több aktiválható korlát.
- Ha az ő-részben változót érintünk, akkor alapértelmezésben a szabály nem alkalmazható
- Ez az ellenőrzés egy

```
:- chr_option(check_guard_bindings,off). (*)
```

deklarációval kikapcsolható (ha mégis érintünk változót, az eredmény nem-definiált, pl. a bevezető alap-példában (*) esetén:)

$$| \text{?- } X \text{ leq } Y. \quad \Longrightarrow \quad Y = X ?$$

Példa: végeshalmaz-korlátok

Egy egyszerű CLPFD keretrendszer CHR-ben

- két-argumentumú korlátokat kezel;
- a korlátokat egy (a keretrendszeren kívül megadott) `test/3` eljárás írja le: `test(C, X, Y)` sikeres, ha a `C` „nevű” korlát fennáll `X` és `Y` között;
- nem csak numerikus tartományokra jó.

Példa: végeshalmaz-korlátok

```
:- use_module(library(lists)).

:- chr_constraint dom/2, con/3.
% dom(X,D) var X can take values from D, a ground list
% con(C,X,Y) there is a constraint C between variables X and Y

con(C, X, Y) <=> ground(X), ground(Y) | test(C, X, Y).
con(C, X, Y), dom(X, XD) dom(Y, YD) <=>
    reduce(x_y, XD, YD, C, NYD) | new_dom(NYD, Y).
con(C, X, Y), dom(Y, YD) dom(X, XD) <=>
    reduce(y_x, YD, XD, C, NXD) | new_dom(NXD, X).

reduce(CXY, XD, YD, C, NYD):-
    select(GY, YD, NYD1), % try to reduce YD by GY
    ( member(GX, XD), test(CXY, C, GX, GY) -> fail
    ; reduce(CXY, XD, NYD1, C, NYD) -> true
    ; NYD = NYD1
    ), !.
```

Példa: végeshalmaz-korlátok

```
test(x_y, C, GX, GY):- test(C, GX, GY).
test(y_x, C, GX, GY):- test(C, GY, GX).

new_dom([], _X) :- !, fail.
new_dom(DX, X):- dom(X, DX),
    ( DX = [E] -> X = E
    ; true
    ).

% labeling:
:- chr_constraint labeling/0.

labeling, dom(X, L) #Id <=> member(X, L), labeling
pragma passive(Id).
```

Az N királynő feladat – az előző keretrendszer alkalmazása

```
:- use_module(library(between), [numlist/3]).

% Qs az N-királynő feladat megoldása
queens(N, Qs) :-
    length(Qs, N),
    numlist(1, N, L1_N), % L1_N = [1, ..., N]
    maplist(set_dom(L1_N), Qs) % tartományok megadása
    safe(Qs), % korlátok felvétele
    labeling. % címkézés

set_dom(Dom, V) :- dom(V, Dom).

% safe(Qs): Qs egy biztonságos királynő-elrendezés.
safe([]).
safe([Q|Qs]) :- no_attack(Qs, Q, 1), safe(Qs).
```

Az N királynő feladat – az előző keretrendszer alkalmazása

```
% no_attack(Qs, Q, I): A Qs lista által leírt királynők
% egyike sem támadja a Q által leírt királynőt, ahol I a Qs
% lista első elemének sortávolsága Q-tól.
no_attack([], _, _).
no_attack([X|Xs], Y, I) :-
    con(no_threat(I), X, Y), % a korlát felvétele
    I1 is I+1,
    no_attack(Xs, Y, I1).

% "Az X és Y oszlopokban I sortávolságra levő királynők nem
% támadják egymást" korlát definíciója, a dom_consistency
% keretrendszernek megfelelően
test(no_threat(I), X, Y) :-
    Y =\= X, Y =\= X-I, Y =\= X+I.

| ?- queens(4, Qs).

Qs = [3,1,4,2], labeling ? ;
Qs = [2,4,1,3], labeling ? ; no
```

A CHR szabályok szintaxisa (a SICStus kézikönyv nyomán)

Rule	--> [Name @] (Simplification Propagation Simpagation) [pragma Pragma].
Simplification	--> Heads <=> [Guard ' '] Body
Propagation	--> Heads ==> [Guard ' '] Body
Simpagation	--> Heads \ Heads <=> [Guard ' '] Body
Heads	--> Head Head, Heads
Head	--> Constraint Constraint # Id
Constraint	--> << Egy korlátként deklarált kifejezés >>
Id	--> << Egy egyedi változó >>
Guard	--> Goal
Goal	--> << Prolog célsorozat >> (Ha ez diszjunkció, akkor kötelező egy Guard, pl. true)
Body	--> Goal
Pragma	--> << passive(Id) alakú kifejezések konjunkciója >> (jelentése: a fejből levő C # Id korlát csak passzív szerepű lehet)

Egyszerű példák

Egy nem-korlát-jellegű példa: prím-szűrés

```
:- chr_constraint primes/1,prime/1.

primes(1) <=> true.
primes(N) <=> N>1 |
    M is N-1, prime(N), primes(M).

absorb(J) @ prime(I) \ prime(J) <=>
    J mod I =:= 0 | true.
```

Egyszerű példák – Boole-korlátok (library('chr/examples/bool.pl'))

Konjunkció definiálása

```
:- chr_constraint and/3, labeling/0.

and(0,X,Y) <=> Y=0.
and(X,0,Y) <=> Y=0.
and(1,X,Y) <=> Y=X.
and(X,1,Y) <=> Y=X.
and(X,Y,1) <=> X=1,Y=1.
and(X,X,Z) <=> X=Z.
and(X,Y,A) \ and(X,Y,B) <=> A=B.
and(X,Y,A) \ and(Y,X,B) <=> A=B.

labeling, and(A,B,C)#Pc <=>
    label_and(A,B,C), labeling
    pragma passive(Pc).

label_and(0,_X,0).
label_and(1,X,X).

| ?- and(X, Y, 0), labeling.
X = 0, labeling ? ;
X = 1, Y = 0, labeling ? ;
no
```

Egyszerű példák – Boole-korlátok (library('chr/examples/bool.pl'))

Számosság

```
:- chr_constraint card/4.

% L-ben a 1-ek száma >= A és =< B.
card(A, B, L):-
    length(L,N), A=<B,0=<B,A=<N, card(A,B,L,N).

triv_sat @ card(A,B,L,N) <=> A=<0,N=<B | true.
pos_sat @ card(N,B,L,N) <=> set_to_ones(L).
neg_sat @ card(A,0,L,N) <=> set_to_zeros(L).
pos_red @ card(A,B,L,N) <=> select(X,L,L1),X==1 |
    A1 is A-1, B1 is B-1, N1 is N-1,
    card(A1,B1,L1,N1).
neg_red @ card(A,B,L,N) <=> select(X,L,L1),X==0 |
    N1 is N-1, card(A,B,L1,N1).

% special cases with two variables
card2nand @ card(0,1,[X,Y],2) <=> and(X,Y,0).
% ...
```

Egyszerű példák – Boole-korlátok (`library('chr/examples/bool.pl')`)

```
labeling, card(A,B,L,N)#Pc <=>
  label_card(A,B,L,N), labeling
  pragma passive(Pc).

label_card(A,B,[],0):- A=<0,0=<B.
label_card(A,B,[0|L],N):- N1 is N-1, card(A,B,L,N1).
label_card(A,B,[1|L],N):-
  A1 is A-1, B1 is B-1, N1 is N-1, card(A1,B1,L,N1).

| ?- card(2,3,L), labeling.

L = [1,1], labeling ? ;
L = [0,1,1], labeling ? ;
L = [1,0,1], labeling ? ;
L = [1,1,_A], labeling ? ;
L = [0,0,1,1], labeling ? ;
L = [0,1,0,1], labeling ? ;
L = [0,1,1,_A], labeling ? ;
% ...
```

Egy nagyobb CHR példa kezdeménye

Területfoglalás c. feladvány

- Adott egy $n * n$ -es mátrix, bizonyos mezőkben egész számok,
- A cél: minden mezőbe számot írni, úgy, hogy az azonos számot tartalmazó összefüggő (oldallal érintkező) területek mérete megegyezzek a terület mezőibe írt számmal. Példa ($n = 5$):

```
. . . . .
2 1 . 4 3
. . . 2 .
. 5 . 3 .
3 . . . 2

megoldás:
2 4 4 3 3
2 1 4 4 3
3 5 5 2 2
3 5 3 3 3
3 5 5 2 2
```

- A feladványt leíró adatstruktúra: `tf(Meret,Adottak)`, ahol `Meret` a négyzet oldalhossza, az `Adottak` egy lista, amelynek elemei `t(S,O,M)` alakú struktúrák. Egy ilyen struktúra azt jelenti, hogy a négyzet `S.` sorának `O.` oszlopában az `M` szám áll.

```
pelda(p1, tf(5, [t(2,1,2),t(2,2,1),t(2,4,4),t(2,5,3),
                t(3,4,2),t(4,2,5),t(4,4,3),t(5,1,3),
                t(5,5,2)]))
```

Egy nagyobb CHR példa kezdeménye

```
:- chr_constraint orszag/3, tabla/1, cimkez/0.

% orszag(Mezok, M, N): A Mezők mező-lista egy összefüggő, M méretű
% terület, amelynek kívánt mérete N. Egy mező a Sor-Oszlop
% Prolog kifejezéssel van megadva.

% tabla(Matrix): A teljes téglalap, listák listájaként.

% cimkez: Címkezési segédkorlát.

foglalas(tf(Meret,Adottak), Mtx) :-
  bagof(Sor,
        S^bagof(Mezo,
                O^tabla_mezo(Meret, Adottak, S, O, Mezo),
                Sor),
        Mtx),
  append(Mtx, Valtozok), % listává lapítja Mtx-t
  MaxTerulet is Meret*Meret,
  domain(Valtozok, 1, MaxTerulet),
  tabla(Mtx),
  matrix_korlatok(Mtx, 1),
  cimkez.
```

Egy nagyobb CHR példa kezdeménye

```
tabla_mezo(Meret, Adottak, S, O, M) :-
  between(1, Meret, S), % 1..Meret felsorolása
  between(1, Meret, O),
  ( member(t(S,O,M), Adottak) -> true
  ; true
  ).
```


Egy nagyobb CHR példa kezdeménye

Korlátok felvétele, CHR szabályok

```
matrix_korlatok([], _).
matrix_korlatok([Sor|Mtx], S) :-
    sor_korlatok(Sor, S, 1),
    S1 is S+1,
    matrix_korlatok(Mtx, S1).
```

```
sor_korlatok([], _, _).
sor_korlatok([M|Mk], S, 0) :-
    orszag([S-0], 1, M),
    01 is 0+1,
    sor_korlatok(Mk, S, 01).
```

Egy nagyobb CHR példa kezdeménye

```
ország(Mezok1, H1, M), ország(Mezok2, H2, M) <=>
    szomszedos_orszag(Mezok1, Mezoek2) |
    H is H1+H2,
    M #>= H,
    append(Mezok1, Mezoek2, Mezoek),
    ország(Mezok, H, M).

ország(Mezok, M, M), ország(Mezok1, _, M1) ==>
    szomszedos_orszag(Mezok, Mezoek1) |
    M1 #\= M.

ország(Mezok, M, M) <=>
    true.

ország(Mezok, H, M), tabla(Mtx) ==>
    nonvar(M), H < M,
    \+ terjeszkedhet(Mezok, M, Mtx) | fail.

(ország(Mezok, H, M) # Id1, tabla(Mtx) # Id2) \ cimkez <=>
    fd_max(M, Max), H < Max |
    szomszedos_mezo(Mezok, Mtx, M), cimkez
    pragma passive(Id1), passive(Id2).
```

Egy nagyobb CHR példa kezdeménye

Segédeljárások, példafutás

```
terjeszkedhet(Mezok, M, Mtx) :-
    szomszedos_mezo(Mezok, Mtx, M0),
    fd_set(M0, Set), fdset_member(M, Set).
```

```
szomszedos_orszag(Mk1, Mk2) :-
    member(S1-01, Mk1), member(S2-02, Mk2),
    ( S1 == S2 -> abs(01-02) == 1
    ; 01 == 02, abs(S1-S2) == 1
    ).
```

```
szomszedos_mezo(Mezok, Mtx, M) :-
    member(S-0, Mezoek),
    relativ_szomszed(S1, 01),
    S2 is S+S1, 02 is 0+01,
    non_member(S2-02, Mezoek),
    matrix_elem(S2, 02, Mtx, M).
% A Mtx mátrix S2. sorának 02. eleme M.
```

Egy nagyobb CHR példa kezdeménye

```
relativ_szomszed(1, 0).
relativ_szomszed(0, -1).
relativ_szomszed(-1, 0).
relativ_szomszed(0, 1).

pelda(p1, tf(5, [t(2,1,2),t(2,2,1),t(2,4,4),t(2,5,3),
    t(3,4,2),t(4,2,5),t(4,4,3),t(5,1,3),
    t(5,5,2)]))).

pelda(p9, tf(6, [t(1,1,1),t(2,3,1),t(2,6,4),t(3,1,3),t(3,6,3),
    t(4,1,2),t(4,5,2),t(4,6,4),t(5,3,3),t(6,1,2),
    t(6,5,3)]))).

| ?- pelda(p1, _Fogl), foglalas(_Fogl, Mtx).
Mtx = [[2,4,4,3,3],
    [2,1,4,4,3],
    [3,5,5,2,2],
    [3,5,3,3,3],
    [3,5,5,2,2]],
cimkez,
tabla([[2,4,4,3,3],[2,1,4,4,3],[3,5,5,2,2],...]) ? ;
no
```

VII. rész

A Mercury LP megvalósítás

- 1 Prolog alapok
- 2 A SICStus clp(Q,R) könyvtárai
- 3 A SICStus clp(B) könyvtára
- 4 A CLP elméleti háttere
- 5 A SICStus clp(FD) könyvtára
- 6 CHR – Constraint Handling Rules
- 7 A Mercury LP megvalósítás

A Mercury nagyhatékonyságú LP megvalósítás

A fíliák szerzője: Benkő Tamás

Célok

- Nagybeni programozás támogatása
- Produktivitás, megbízhatóság, hatékonyság növelése

Eszközök, elvek

- Teljesen deklaratív programozás
- Funkcionális elemek integrálása
- Hagyományos (Prolog) szintaxis megőrzése
- Típus, mód és determinizmus információk használata
- Szeparált fordítás támogatása
- Prologénál erősebb modul-rendszer
- Sztenderd könyvtár

Elérhetőség

- Fejlesztő (nyelv+implementáció): University of Melbourne
- <http://www.cs.mu.oz.au/mercury/>
- GPL

Mercury példaprogram

File-név illesztés

- A feladat: operációs rendszerek file-név-illesztéséhez hasonló funkció megvalósítása.

Adott minta és karaktersorozat illesztésekor

- A ? egy tetszőleges karakterrel illeszthető.
- A * egy tetszőleges (esetleg üres) karakter-sorozattal illeszthető.
- A \c karakter-pár a c karakterrel illeszthető, ha egy minta \-re végződik, az illesztés meghiúsul.
- Bármely más karakter csak önmagával illeszthető.

A Mercury program hívási formája: match Pattern1 Name Pattern2

Itt a Pattern1 és Pattern2 mintákban a * és ? azonos elrendezésben kell előforduljon.

A program funkciója

- a Pattern1 mintára (az összes lehetséges módon) illeszti a Name nevet,
- a * és ? karakterek helyébe kerülő szövegeket a Pattern2 mintába behelyettesíti,
- és az így kapott neveket kiírja.

A file-név-illesztő Mercury program listája – a főprogram

```
:- module match.
/*-----*/
:- interface.
:- import_module io.
:- pred main(io__state::di, io__state::uo) is det. % kötelező

/*-----*/
:- implementation.
:- import_module list, std_util, string, char.

main -->
    command_line_arguments(Args),
    ( {Args = [P1,N1,P2]} ->
        {solutions(match(P1, N1, P2), Sols)},
        format("Pattern '%s' matches '%s' as '%s' matches\
the following:\n\n", [s(P1), s(N1), s(P2)]),
        write_list(Sols, "\n", write_string),
        write_string("\n*** No (more) solutions\n")
    ); write_string("Usage: match <p1> <n1> <p2>\n")
    ).
```

A file-név-illesztő Mercury program listája

Egyes könyvtári eljárások deklarációi

```
:- pred io_write_string(string, io_state, io_state).
:- mode io_write_string(in, di, uo) is det.
    % Writes a string to the current output stream.

:- pred io_write_list(list(T), string, pred(T, io_state, io_state),
    io_state, io_state).
:- mode io_write_list(in, in, pred(in, di, uo) is det, di, uo) is det.
    % io_write_list(List, Separator, OutputPred, IO0, IO)
    % applies OutputPred to each element of List, printing Separator
    % between each element. Outputs to the current output stream.

:- pred io_format(string, list(io_poly_type), io_state, io_state).
:- mode io_format(in, in, di, uo) is det.
    % io_format(FormatString, Arguments, IO0, IO).
    % Formats the specified arguments according to
    % the format string, using string_format, and
    % then writes the result to the current output stream.
    % (See the documentation of string_format for details.)
```

Példaprogram, folytatás – a program magja

```
:- pred match(string::in, string::in, string::in, string::out) is nondet.
match(Pattern1, Name1, Pattern2, Name2) :-
    to_char_list(Pattern1, Ps1), to_char_list(Pattern2, Ps2),
    to_char_list(Name1, Cs1),
    match_list(Ps1, Cs1, L), match_list(Ps2, Cs2, L),
    from_char_list(Cs2, Name2).

:- type subst ---> any(list(char)) ; one(char).

:- pred match_list(list(char), list(char), list(subst)).
:- mode match_list(in, in, out) is nondet. % mindkét sor kell,
:- mode match_list(in, out, in) is nondet. % vagy egyik se
match_list([], [], []).
match_list([?|Ps], [X|Cs], [one(X)|L]) :-
    match_list(Ps, Cs, L).
match_list([*|Ps], Cs, [any(Xs)|L]) :-
    append(Xs, Cs1, Cs),
    match_list(Ps, Cs1, L).
match_list([\, C|Ps], [C|Cs], L) :-
    match_list(Ps, Cs, L).
match_list([C|Ps], [C|Cs], L) :-
    C \= (*), C \= ?, C \= (\),
    match_list(Ps, Cs, L).
```

Példaprogram, folytatás – a program fordítása, futása

```
> mmc match.m
> ./match '*b*' abbaba '* *'
Pattern `*b*' matches `abbaba' as `* *' matches the following:
a baba
ab aba
abba a
*** No (more) solutions
> ./match '**z?c' foozkc '|*|*|?'
Pattern '**z?c' matches 'foozkc' as '|*|*|?' matches the following:
|foo|k
|fo|o|k
|f|oo|k
||foo|k
*** No (more) solutions
```

Modul-rendszer

Támogatott tulajdonságok

- szeparált fordítás
- absztrakt típusok használata
- modulok egymásbaágyazása

Deklarációk

- modul kezdés: `:- module (modulename).`
- interfész: `:- interface.`
- megvalósítás: `:- implementation.`
- lezárás (opcionális): `:- end_module (modulename).`

Az interfész rész

- Minden szerepelhet, kivéve függvények, predikátumok és almodulok definíciója.
- Az itt szereplő dolgok fognak kilátszani a modulból.

Az implementációs rész

- Szerepelnie kell a függvények, predikátumok, absztrakt típusok és almodulok definíciójának.
- Az itt deklarált dolgok lokálisak a modulra.

Típusok

A típusok fajtái

- primitív: `char`, `int`, `float`, `string`
- predikátum: `pred`, `pred(T)`, `pred(T1, T2)`, ...
- függvény: `(func) = T`, `func(T1) = T`, ...
- univerzális: `univ`
- „a világ állapota”: `io__state`
- felhasználó által bevezetett

Felhasználói típusok

- megkülönböztetett unió (az unióban minden funktor különböző)
- ekvivalencia (típusátnevezés)
- absztrakt adattípusok

Megkülönböztetett unió

Jellemzők

- Enumerációs és rekord típus
- lehet monomorf vagy polimorf (paraméteres típus)

Enumeráció típus

```
:- type fruit ---> apple ; orange ; banana ; pear.
```

Rekord típus

```
:- type itree ---> empty ; leaf(int) ; branch(itree, itree).
```

Polimorfikus típus

```
:- type list(T) ---> [] ; [T|list(T)].
:- type pair(T1, T2) ---> T1 - T2.
```

Megkülönböztetett unió

A játékszabályok

- `:- type <típus> ---> <törzs>`.
- `<típus>` vagy atom, vagy olyan struktúra, amelynek argumentumai *különböző* változók
- a `<törzs>` minden konstruktorában az argumentumok típusok vagy változók
- a `<törzs>` minden változójának szerepelnie kell `<típus>`-ban
- egy típusban nem fordulhat elő egynél többször azonos nevű és argumentumszámú konstruktor

Következmények

- egyszerű típusok, pl. `int`, általában „dobozolatlanul” implementálhatók
- „heterogén” kollekció esetében explicit csomagolásra van szükség

Más típusú típusmegadások

Ekvivalencia típus

- `:- type <típus> == <típus>`.
- `:- type assoc_list(K, V) == list(pair(K, V))`.
- nem lehet ciklikus
- a jobb és a bal oldal ekvivalens

Absztrakt típus

- `:- type <típus>`.
- `:- type t2(T1, T2)`.
- a definíció el van rejtve az implementációs részben

A típusok használata

Predikátum-deklaráció

- A predikátumok és függvények argumentumainak a típusát adja meg.
- `:- pred is_all_uppercase(string).`
- `:- func length(list(T)) = int.`

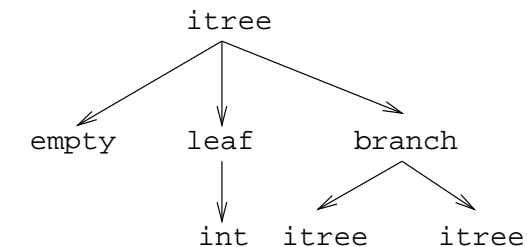
Módok, behelyettesítettség

Mód

- két behelyettesítettség állapotból álló pár
- az első állapot arról szól, ahogy a paraméter bemegy, a második arról, ahogy kijön egy adott függvényből/predikátumból
- pl.: `out:` (szabad) változó megy be, tömör kifejezés jön ki

Példa típus-definícióra

```
:- type itree ---> empty ; leaf(int) ; branch(itree, itree).
```



Módok, behelyettesítettség

Példák az itree típushoz tartozó behelyettesítettségű fákra

- Egy olyan fa, ahol a levelekben levő egészek behelyettesítetlenek:


```
:- inst bs = bound(empty; leaf(free); branch(bs,bs)).
```
- Parametrizált inst-eket is csinálhatunk:


```
:- inst bs(Inst) = bound(empty ; leaf(Inst) ;
                          branch(bs(Inst),bs(Inst))).
```

```
:- inst listskel(Inst) = bound([], [Inst|listskel(Inst)]).
```

Általánosan

- Az állapot leírásakor a típust tartalmazó („vagy”) csúcsokhoz rendelünk behelyettesítettségű állapotot.
- A deklarációban a `bound/1`, a `free/0` és a `ground/0` funktorokat használhatjuk.

Módok használata

Mód-deklaráció

- Módok definiálása:


```
:- mode <m> == <instbefore> >> <instafter>.
```

```
:- mode in == ground >> ground.
```

```
:- mode out == free >> ground.
```
- Módok átnevezése:


```
:- mode <m1> == <m2>.
```

```
:- mode (+) == in.
```

```
:- mode (-) == out.
```
- Parametrizált módok:


```
:- mode in(Inst) == Inst -> Inst.
```

```
:- mode out(Inst) == free -> Inst.
```

Módok használata

Predikátum-mód deklaráció

- Egy eljárás minden paraméteréről megmondjuk, hogy milyen módú.


```
:- pred append(list(T), list(T), list(T)).
:- mode append(in, in, out).
:- mode append(out, out, in).
```
- Egyetlen mód esetén összevonható a pred deklarációval.


```
:- pred append(list(T)::in, list(T)::in, list(T)::out).
```
- Függvényeknek is lehet több módja.
- Mercuryban egy adott predikátum egy adott módját nevezzük eljárásnak.

Módok: mire kell figyelni?

- free változókat még egymással sem lehet összekapcsolni,


```
:- mode append(in(listskel(free)),
               in(listskel(free)),
               out(listskel(free))).
```

hibás!
- Ha egy predikátumnak nincs predikátum-mód deklarációja, akkor a fordító kitalálja az összes szükségeset, (de függvényeknél ilyenkor felteszi, hogy minden argumentuma in és az eredménye out).
- Ha egy predikátumnak van mód-deklarációja, akkor csak a megadott módoknak megfelelő eljárásokat generálja.
- Ilyenkor a fordító átrendezi a hívásokat, hogy a mód korlátokat kielégítse; ha ez nem megy, hibát jelez. (Jobbrekurzió is „elveszhet”... , lásd a `match_list/3` `append/3` hívását!)

Módok: mire kell figyelni?

- A megadottnál „jobban” behelyettesített argumentumokat egyesítésekkel kiküszöböli a fordító. Példa:


```
:- mode append(in, in, out).           (1)
:- mode append(out, out, in).        (2)
```
- Az alábbi hívásra a (2) módnak megfelelő szétszedő `append`-et fogja használni, ami nem hatékony:


```
append([1,2,3], X, [1,2,3,4,5])
---->          append(U, X, [1,2,3,4,5]), U = [1,2,3].
```
- Hatékonyabb kódot kapunk az alábbi mód-deklaráció megadásával:


```
:- mode append(in, out, in).          (3)
```

Determinizmus

Determinizmus kategóriák

Minden predikátum minden módjára (azaz minden eljárásra) megadjuk, hogy hányféleképpen sikerülhet és hogy meghiúsulhat-e.

A kategóriák nevei

meghiúsulás \ megoldások	0	1	> 1
nem	erroneous	det	multi
igen	failure	semidet	nondet

A determinizmus-deklaráció

```
:- mode append(in, in, out) is det.
:- mode append(out, out, in) is multi.
:- mode append(in, in, in) is semidet.
```

Determinizmus

Összevont predikátum-, mód- és determinizmus-deklaráció

```
:- pred p(int::in) is det.
p(_).
```

„Egzotikus” determinizmusok

- failure determinizmusú a fail/0
- erroneous determinizmusú a require__error/1

Példák

Helyesek-e?

```
:- type fruit ---> banana ; orange ; lemon ; grape.
:- type ice_cream ---> lemon ; banana ; orange.
:- type unsi ---> z ; s(unsí).
```

Milyen módjai vannak és milyen a determinizmus?

```
:- pred make_ice_cream(fruit, ice_cream).
make_ice_cream(lemon, lemon).
make_ice_cream(orange, lemon).
make_ice_cream(banana, banana).

:- func factorial(int) = int.
factorial(N) = F :-
    ( N = 0 -> F = 1
    ; N > 0 -> F = factorial(N-1)*N
    ; require__error("out of domain")
    ).

:- pred even(num).
even(z).
even(s(N)) :-
    odd(N).

:- pred odd(num).
odd(s(N)) :-
    even(N).
```

Egyszeres hivatkozású (unique) módok

Jellemzők

- Az adott paraméterre csak egy referencia lehet.
- A referencia megszűntével a memória felszabadítható vagy újrahasznosítható.
- Segítségével destruktív frissítés valósítható meg.
- Ezt használja pl. az `io` könyvtár is.

Új behelyettesítettségek

- `unique`: olyan, mint `ground`, de csak egyszeres hivatkozás lehet
- `unique(...)`: olyan, mint `bound(...)`, de csak egyszeres hivatkozás lehet
- `dead`: nincs rá több hivatkozás

Egyszeres hivatkozású (unique) módok

Beépített módok

- `:- mode uo == free >> unique.`
- `:- mode ui == unique >> unique.`
- `:- mode di == unique >> dead.`