

1. Bizonyítsa be, hogy ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \in \text{NP}$, akkor $L_1 \in \text{NP}$.

Megoldás: Ha $L_1 \prec L_2$, akkor van olyan M_1 DTG, ami $O(n^k)$ időben kiszámolja a redukció $f(x)$ függvényét. Mivel $L_2 \in \text{NP}$, van olyan M_2 NTG, aminek nyelve L_2 és futásideje $O(n^l)$. Legyen M az a NTG, ami x inputon először kiszámítja $f(x)$ -et, majd $f(x)$ -en futtatja M_2 -t. A f tulajdonságai miatt világos, hogy M nyelve L_1 , futásideje pedig $O(n^{kl})$ lesz. Ezért $L_1 \in \text{NP}$.

2. Bizonyítsa be, hogy ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \in \text{co NP}$, akkor $L_1 \in \text{co NP}$.

Megoldás: Ha $L_2 \in \text{co NP}$, akkor $\overline{L_2} \in \text{NP}$. Mivel $L_1 \prec L_2$, ezért teljesül $\overline{L_1} \prec \overline{L_2}$ is. Így a 1. feladat miatt $\overline{L_1} \in \text{NP}$. Ebből viszont következik $L_1 \in \text{co NP}$.

3. Tudjuk, hogy $L_1 \prec L_2$ és hogy az L_2 komplementere Karp-redukálható a PARTÍCIÓ nyelvre. Igazolja, hogy ekkor $L_1 \in \text{co NP}$!

Megoldás: A második feltétel szerint $\overline{L_2} \prec \text{PARTÍCIÓ}$, és mivel PARTÍCIÓ NP-teljes (és így NP-beli), ezért $\overline{L_2} \in \text{NP}$. Az első feltétel szerint $L_1 \prec L_2$, amiből $\overline{L_1} \prec \overline{L_2}$ következik. Ezért $\overline{L_1}$ is NP-ben van, ami a co NP definíciója miatt ekvivalens az $L_1 \in \text{co NP}$ tulajdonsággal.

4. Igazolja, hogy léteznek az alábbi Karp-redukciók! (a) $\text{RH} \prec \text{HAM}$ (b) $\text{ÖSSZEFÜGGŐ} \prec \text{3SAT}$ (c) $\text{ÖSSZEFÜGGŐ} \prec \text{PÁROS}$

(ÖSSZEFÜGGŐ az összefüggő gráfok nyelve, PÁROS meg a páros gráfoké)

Megoldás: (a) $\text{RH} \in \text{NP}$ (sőt, NP-teljes), HAM NP-teljes, tehát a Karp-redukció az NP-teljesség definíciója miatt létezik.

(b) $\text{ÖSSZEFÜGGŐ} \in \text{P} \subseteq \text{NP}$ és 3SAT NP-teljes, tehát a Karp-redukció az NP-teljesség definíciója miatt létezik.

(c) $\text{ÖSSZEFÜGGŐ} \in \text{P}$ és $\text{PÁROS} \in \text{P}$ is teljesül. Legyen a Karp-redukció a következő: ha az x bemenet nem gráf, akkor $f(x) = x$, különben pedig ellenőrizzük, hogy a megadott gráf összefüggő. Ha igen, akkor legyen $f(x)$ egy él, különben meg egy háromszög. Mivel az összefüggőség polinom időben eldönthető, ezért ez az f polinom időben számolható. Ha a gráf összefüggő, akkor a képe (egyetlen él) páros gráf, ha meg nem összefüggő, akkor a képe K_3 , ami nem páros gráf.

5. Igazolja, hogy ha $\text{co NP} \neq \text{NP}$, akkor $\text{MAXKLIKK} \notin \text{P}$.

Megoldás: Indirekt tegyük fel, hogy $\text{MAXKLIKK} \in \text{P}$. Mivel tudjuk, hogy MAXKLIKK NP-teljes, ezért minden $L' \in \text{NP}$ nyelvre teljesül, hogy $L' \prec \text{MAXKLIKK}$, amiért $L' \in \text{P}$ is igaz. Tehát $\text{NP} \subseteq \text{P}$, amiből persze következik $\text{NP} = \text{P}$ is.

Ha $\text{NP} = \text{P}$, akkor $\text{co NP} = \text{co P}$ is igaz. De mivel $\text{co P} = \text{P}$, ezért $\text{co NP} = \text{NP}$ is teljesül, ami viszont ellentmondás.

6. Adjon Karp-redukciót a PARTÍCIÓ problémáról a RH problémára!

(Az RH eldöntési problémában egy $(s_1, s_2, \dots, s_n; b)$ inputról kell eldönteni, hogy ki lehet-e választani pár olyan s_i -t, amiknek összege b (minden s_i és b is pozitív egész). A PARTÍCIÓ problémában pedig egy $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ inputról kell eldönteni, hogy szét lehet-e osztani az s_i értékeket két halmazba úgy, hogy a két rész összege ugyanaz legyen (minden s_i pozitív egész).)

Megoldás: Legyen $f : (s_1, s_2, \dots, s_n) \mapsto (s_1, s_2, \dots, s_n; b)$, ahol $b = \sum s_i/2$, ha ez a b egész szám, különben meg pl. $(2, 2; 1)$. Ez az f egy megfelelő Karp-redukció, mert csak lineárisan sok összeadás kell hozzá, hogy a b -t kiszámoljuk, és az RH megoldása megegyezik a PARTÍCIÓ megoldásával.

7. Mutassa meg, hogy az alábbi nyelvek NP-teljesek!

(a) az olyan G gráfokból álló nyelv, amelyek kiszínezhetőek 3 színnel úgy, hogy mindegyik színt ugyanannyiszor használjuk.

(b) az olyan (G, a, b, k) négyesekből álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b \in V(G)$, $k > 0$ egész szám és G -ben van olyan út a és b között, aminek a hossza legalább k .

(c) az olyan (G, a, b) hármasokból álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b > 0$ egész számok és a G gráfnak van a $K_{a,b}$ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráfja.

(d) az olyan G irányítatlan gráfokból álló nyelv, amelyekre G -ben van olyan C kör, hogy minden $v \notin C$ csúcs össze van kötve éllel a C valamely csúcsával.

(e) az olyan G irányítatlan gráfokból álló nyelv, amelyekre G -ben van olyan C kör aminek hossza legalább G csúcsszámának fele.

(f) az olyan Boole-formulákból álló nyelv, amelyek két különböző értékadással is kielégíthetőek.

Megoldás: (a) Könnyen látszik, hogy ez az L nyelv NP-beli, tanú egy megfelelő színezés. Az NP-nehézség bizonyításához megadunk egy $3SZÍN \preceq L$ Karp-redukciót. Ha G egy v pontú gráf, akkor $G' = f(G)$ legyen az a gráf, amit G -ből $2v$ db izolált pont hozzávételével kapunk. Ez nyilván kiszámítható polinom időben. Ha G színezhető 3 színnel úgy, hogy az i -edik színt k_i -szer használjuk, akkor G' kiszínezhető 3 színnel a feltételeknek megfelelően a következő módon: G pontjait ugyanúgy színezzük, az izolált pontok közül pedig $v - k_i$ -t színezzük az i -edik színnel. Ebben a színezésben egyrészt minden pontot kiszíneztünk, hiszen $v - k_1 + v - k_2 + v - k_3 = 3v - (k_1 + k_2 + k_3) = 2v$. Másrészt minden színt épp v -szer használtunk.

Ha viszont G' kiszínezhető 3 színnel a feltételeknek megfelelően, akkor ez megad egy jó színezést G pontjain.

(Formálisan a függvénynek azon szavakhoz is kell rendelni valamit, amik azért nincsenek benne a 3SZÍN nyelvben, mert nem írnak le gráfot. Ha az ilyen x szavakra $f(x) = x$, az minden esetben megfelelő, hiszen $x \notin L$ is teljesülni fog. Ezért erre nem szükséges mindig külön kitérni.)

(b) *Vázlatosan:* NP-beli, mert tanú egy ilyen út. NP-nehéz: Adunk egy HAMÚT $\preceq L$ Karp-redukciót: G -hez adjunk 2 új pontot, ezek legyenek a és b , kössük össze őket G minden csúcsával és legyen $k = V(G) + 1$. Belátható, hogy ez teljesíti a feltételeket.

(c) Az, hogy ez az L nyelv NP-ben van egyszerűen látható a tanú tétel alapján: tanú lehet a megfelelő részgráf pontjainak felsorolása. Ez nyilván polinom hosszú, és polinom időben ellenőrizhető is, hogy a megadott pontok egy páros gráfot feszítenek.

Az NP-teljesség bizonyításához egy ismert NP-teljes nyelvet kell visszavezetni L -re. Itt mutatunk egy MAXFTL $\preceq L$ Karp-redukciót. A MAXFTL bemenetei (G, k) alakúak, ahol G egy gráf, k pozitív egész. Készítsük el belőle a $(G', k, 2)$ bemenetet, ahol G' úgy keletkezik a G -ből, hogy hozzáveszünk 2 csúcst, melyeket összekötünk G csúcsaival (de egymással nem). Ez polinom időben megoldható.

Vegyük észre, hogy ha G -ben van k független pont, akkor ezek és a két új pont egy feszített $K_{k,2}$ gráfot adnak G' -ben, azaz ha $(G, k) \in \text{MAXFTL}$, akkor $(G', k, 2) \in L$. Másrészt, ha G' -ben van feszített $K_{k,2}$ és $k \geq 2$, akkor ennek a k oldala biztos, hogy az eredeti G -ben helyezkedik el, azaz van G -ben k független pont. (A $k = 1$ eset triviálisan eldönthető polinom időben, ilyenkor feleltessünk meg neki egy triviálisan L -ben levő bemenetet.)

(2 pont helyett elég 1 pontot hozzávenni, akkor a $K_{k,1}$ páros gráf létezése a kérdés.)

(d) Az, hogy ez a nyelv NP-ben van világos, hiszen a nyelvbe tartozásra tanú egy megfelelő C kör csúcsainak a kör szerinti sorrendben való felsorolása. Ez polinom hosszú, és annak ellenőrzése, hogy a megadott pontok az adott sorrendben kört alkotnak, illetve, hogy minden további csúcs össze van kötve a kör egy pontjával ellenőrizhető $O(c + v^2) = O(v^2)$ lépésben (itt c a kör hossza, v a gráf csúcsainak száma).

Az NP-teljességhez mutatunk egy HAM $\preceq L$ Karp-redukciót. Egy tetszőleges G gráfból készítsük el azt a G' gráfot, amiben G -t úgy egészítjük ki, hogy minden v_i csúcsához felveszünk egy új w_i csúcst, amit összekötünk v_i -vel (és mással nem). Ezzel a csúcsok számát megdupláztuk, az új gráf szomszédossági mátrixa polinom időben előállítható. (Hogy néz ki az új mátrix?)

Ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor ez a kör olyan, amilyennek G' -ben lenni kell, tehát ha $G \in \text{HAM}$, akkor $G' \in L$. Másrészt ha $G' \in L$, akkor a feltételnek megfelelő C kör nem tartalmazhat egyet sem a w_i pontokból, mert ezek fokszáma 1, ahhoz meg, hogy ezek mindegyike össze legyen kötve

a körrel, a C -nek az összes v_i -t tartalmaznia kell, azaz C egy Hamilton-kör G -ben, tehát ha $G' \in L$, akkor $G \in \text{HAM}$ teljesül.

(e) Az, hogy ez a nyelv NP-ben van világos, hiszen a nyelvbe tartozásra tanú egy megfelelő C kör csúcsainak a kör szerinti sorrendben való felsorolása. Ez polinom hosszú, és annak ellenőrzése, hogy a megadott pontok az adott sorrendben kört alkotnak, illetve a hossza megfelelő, nyilván elvégezhető polinom időben.

Az NP-teljességhez mutatunk egy $\text{HAM} \leq L$ Karp-redukciót. Egy tetszőleges G gráfból készítsük el azt a G' gráfot, amiben G -hez hozzáveszünk $|V(G)|$ darab izolált pontot, így $|V(G')| = 2|V(G)|$. Ha G -ben van Hamilton-kör, akkor ez G' pontjainak épp felét tartalmazza. Ha G' -ben van olyan kör, ami pontjainak legalább felét tartalmazza, akkor ez kör G minden pontját tartalmazza, hiszen az izolált pontokon nem mehet át kör. Így viszont G -ben ez egy Hamilton-kör lesz.

Megjegyzés: Az is jó, ha G' -t úgy konstruáljuk, hogy két komponensből álljon, mindeket G -vel izomorf.

(f) A nyelv NP-ben van, hiszen megfelelő tanú 2 különböző értékadás. Ezek megfelelő voltát nyilván lehet ellenőrizni polinom időben.

Az NP-teljességhez mutatunk egy $\text{SAT} \leq L$ Karp-redukciót. Ha ϕ egy tetszőleges Boole-formula, akkor legyen $\phi' = \phi \wedge (y \vee \bar{y})$, ahol y egy olyan változó, ami nem szerepel ϕ -ben. Ha ϕ kielégíthető, akkor ϕ' -nek lesz két különböző kielégítése, hiszen y értékét választhatjuk igaznak és hamisnak is. Ha ϕ' -nek kielégíthető, akár már egyféleképpen is, akkor nyilván ϕ is.

8. Tegyük fel, hogy $P \neq \text{NP}$ és $L_1 \in P$. Lehetséges-e, hogy

- (a) egy NP-teljes L_2 nyelvre L_1 Karp-redukálható?
- (b) egy NP-teljes L_2 nyelv Karp-redukálható L_1 -re?
- (c) az L_1 nyelv NP-beli?

Megoldás: (a) $L_1 \in P \subseteq \text{NP}$, tehát az NP-teljesség definíciója miatt biztos, hogy $L_1 \leq L_2$.

(b) Ha $L_2 \leq L_1$ és L_2 NP-teljes, akkor L_1 is az, mivel $L_1 \in P \subseteq \text{NP}$. Ebből $P = \text{NP}$ következne, tehát a feltevés miatt ez nem lehetséges.

(c) Mivel $P \subseteq \text{NP}$, ezért $L_1 \in \text{NP}$ biztosan igaz.

9. Tekintsük azt a problémát, hogy egy adott G irányítatlan súlyozott gráfban mekkora a maximális súlyú út súlya! Adja meg, mi lesz az ehhez tartozó nyelv, és lássa be, hogy az NP-teljes!

Megoldás: Egy eldöntési problémává kell átalakítani. Maximum-keresési feladatoknál ezt úgy jó csinálni, hogy azt kérdezzük, van-e elég nagy megoldás. Tehát az L nyelv az olyan (G, k) párokból álljon, ahol G egy irányítatlan súlyozott gráf, k egy szám és G -ben van olyan út, melynek súlya legalább k .

$L \in \text{NP}$, mert tanú lehet egy jó út, pontosabban a pontjainak az út szerinti sorrendben való felsorolása. Ez polinom hosszú. Amit ellenőrizni kell, hogy valóban egy utat határoznak meg és hogy ennek összsúlya legalább k , ami megy polinom időben.

Az NP-teljességhez visszavezetünk rá egy NP-teljes nyelvet: $\text{HAMÚT} \leq L$. Egy tetszőleges G gráfból úgy kapjuk a G' súlyozott gráfot, hogy minden él súlya legyen 1. Legyen $f(G) = (G', k)$, ahol $k = n - 1$ és n a G csúcsainak száma. Ez Karp-redukció, mert polinom időben számolható (a gráf mátrixán nem is kell változtatni, elég a k értékét kiszámolni). Továbbá világos, hogy pontosan akkor van Hamilton-út a gráfban ha van legalább $n - 1$ súlyú út G' -ben (igazából pontosan $n - 1$ súlyú lesz az út, mert ennél több élből nem állhat).

10. s-T-HAMÚT jelöli az olyan (G, s, t) hármasokból álló nyelvet, ahol a G irányítatlan gráf s és t csúcsa között van Hamilton-út. Igazolja, hogy az alábbi nyelvekre az s-T-HAMÚT nyelvről van Karp-redukció!

- (a) HAMÚT: a Hamilton-úttal rendelkező gráfok nyelve
- (b) HAM: a Hamilton-körrel rendelkező gráfok nyelve

Megoldás: Vegyük észre, hogy a feladat nem kéri, hogy adjunk meg Karp-redukciót, elegendő a létezését megmutatni!

HAMÚT és HAM is NP-teljes, az NP-teljeség definíciója miatt elegendő belátni, hogy s -T-HAMÚT $\in$ NP. Ez azért teljesül, mert jó tanú egy s -ből t -be vezető út csúcsainak felsorolása az út szerinti sorrendben. Egy ilyen tanú hossza $O(n \log n) \subset O(n^2)$, ami polinomiális (n a gráf csúcsainak száma). Az ellenőrzése meg abból áll, hogy valóban a gráf különböző csúcsait soroltuk fel, melyek közül az első az s , az utolsó a t , és a felsorolásban szomszédos csúcsok között van él, ami a felsorolás hosszában lineáris, azaz a bemenet hosszában polinomiális lépésben megoldható.

11. Bizonyítsa be, hogy az s -T-HAMÚT nyelv NP-teljes!

Megoldás: Már láttuk az előző feladatban, hogy NP-beli. Most megadunk egy HAM $\prec$ s -T-HAMÚT Karp-redukciót.

Egy tetszőleges $G(V, E)$ gráfhoz készítsük el a (G', s, t) hármast a következőképpen: Válasszuk ki egy csúcsát G -nek, ez lesz s . A G' csúshalmazát egészítsük ki egy új elemmel, $V' = V \cup \{t\}$. A G' -ben megtartjuk a G éleit, az új t csúcs szomszédai egyezzenek meg az s szomszédjaival, $E' = E \cup \{\{t, v\} \mid \{s, v\} \in E\}$. Ez a konstrukció polinom időben elvégezhető (a mátrixhoz egy új sort és oszlopot kell hozzávenni, amelyek megegyeznek s sorával, oszlopával).

Még azt kell megmutatni, hogy $G \in \text{HAM} \Leftrightarrow (G', s, t) \in s\text{-T-HAMÚT}$. Ha $G \in \text{HAM}$, akkor ha G' -ben elkezdjük ezt a Hamilton-kört s -ből követni, de az utolsó éllel nem s -ben bezárjuk, hanem a megfelelő új éllel t -be lépünk, akkor a G' egy s -ből t -be vivő Hamilton-útját kapjuk. Visszafelé pedig, a G' egy s és t pontot összekötő Hamilton-útjából úgy kaphatjuk G egy Hamilton-körét, ha az út utolsó éle helyett a neki megfelelő éllel az s -be lépünk G -ben.

12. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges n csúcsú gráfról polinom időben megmondja, hogy van-e benne Hamilton-kör. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott G gráfban egy Hamilton-kört?

Megoldás: Először adjuk be az eljárásnak a G gráfot. Ha az a válasz, hogy nincs benne Hamilton-kör, akkor készen vagyunk.

Különben legyenek a G gráf élei $f_1, f_2, \dots, f_m$. Az $i = 1, 2, \dots, m$ értékekre sorban csináljuk a következőt:

Hagyjuk el a gráfból az f_i élet, jelölje a kapott gráfot G' . Adjuk be ezt a gráfot az eljárásnak. Amennyiben az a válasz, hogy van benne Hamilton-kör, akkor $G = G'$ -vel folytatjuk az eljárást. Ha nincs benne, akkor viszont nem változtatjuk meg G -t.

Vegyük észre, hogy az aktuális G -ben mindig lesz Hamilton-kör, de elhagyunk minden élet, ami ehhez „nem fontos”. A végén a gráfban kizárólag egy Hamilton-kör élei maradnak meg, így itt már könnyű ezt „megtalálni”.

Lépésszám: Legyen az eredeti eljárás lépésszáma az n csúcsú gráfokon $O(n^c)$. Ezt m -szer hívjuk meg, $m < n^2$. Egy él elhagyása megoldható $O(n)$ lépésben, tehát az egész együtt $O(m(n^c + n))$, azaz polinomiális.

Megjegyzés: Lehet, hogy eredetileg több Hamilton-kör is van a gráfban. Mindig azt ellenőrizzük, hogy marad-e az f_i elhagyása után is Hamilton-kör, és ha igen, akkor egy kevesebb élű gráffal folytatjuk.