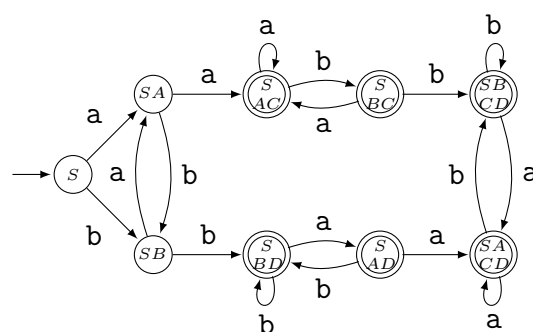
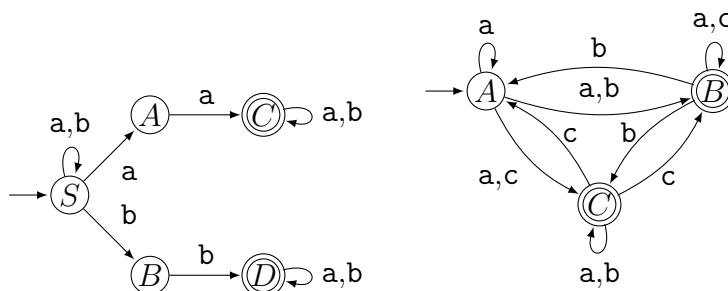
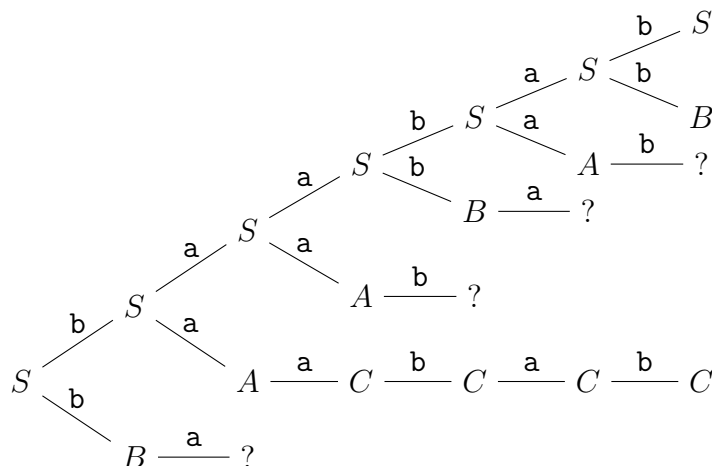


1. Mindkét nemdeterminisztikus véges automatára

- adja meg a **baabab** szóhoz tartozó számítási fát!
- A tanult eljárással készítsen belőlük determinisztikus véges automatát!
- Milyen nyelvet fogadnak el ezek a véges automaták?

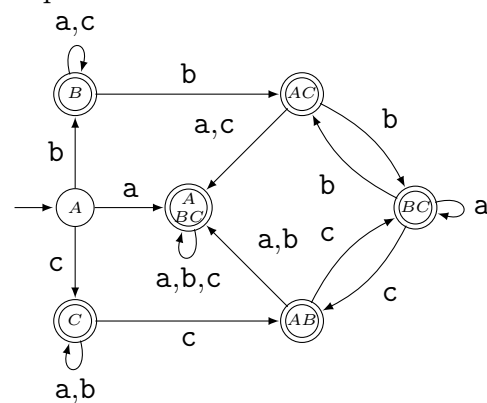
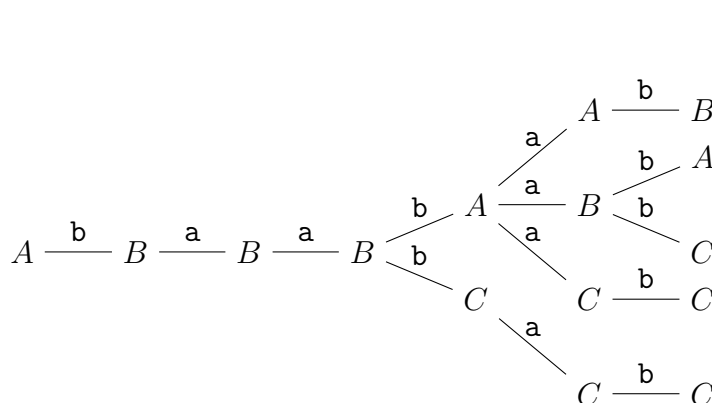
Megoldás: Nézzük az elsőt! Erre a számítási fa és a determinizált automata:



A számítási fáról leolvasható, hogy elfogadja a szót, hiszen van olyan számítási út, ami végig ér és az elfogadó C állapotban végződik.

A nemdeterminisztikus változatból jól látszik, hogy azokat a szavakat fogadja el, amelyekben az *aa* és a *bb* részsavak közül legalább az egyik előfordul. Ha egy ilyen előfordulás első karakterénél hagyjuk el az *S* állapotot, akkor elfogadó állapotban végződik a számítás, különben meg nem, mert nem tud eljutni a *C* vagy *D* állapotig. A determinisztikus változaton azt lehet megfigyelni, hogy az *SAC* és *SBD* állapotokba akkor érünk, amikor először jelenik meg két egyforma karakter egymás után. Innen már csak elfogadó állapotok között mozgunk (amiket, épp ezért, ha akarjuk, össze is vonhatnánk egyetlen elfogadó állapotba).

A második automatánál a számítási fa és a determinizálással kapott automata:



A számítási fában egyik úton sem akadunk el, és mivel van olyan ág, ami nem A -val végződik, a szót az automata elfogadja.

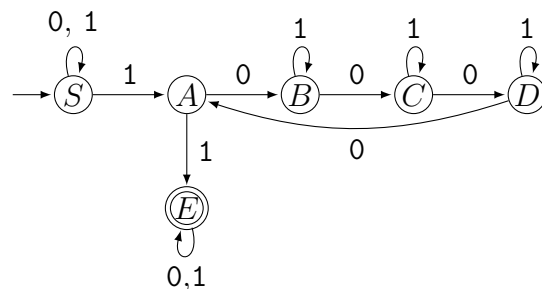
Itt a DVA-n látszik, hogy a szó első karakterével elfogadó állapotba jutunk, és a további karakterek hatására is mindig elfogadó állapot következik. Tehát a nyelv az összes nem üres szóból áll.

Ez a nemdeterminisztikus változatból is leolvasható. Az automata az üres szót nem fogadja el, de az első karakterrel át tudunk menni az elfogadó B és C állapotokból legalább az egyikbe, a továbbiakban mindig van olyan lehetőség, ami nem az A állapotba (az egyetlen nem elfogadó állapotba) vezet.

2. Igazolja, hogy reguláris az a nyelv, amelyik az összes olyan 0/1 sorozatot tartalmazza, amelyben van két olyan 1, hogy a közöttük álló 0-k száma osztható 4-gyel. (A két választott 1 között további 1-ek is előfordulhatnak.)

Megoldás:

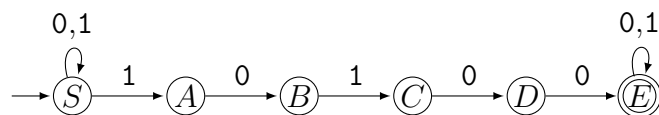
Ahhoz, hogy igazoljuk a regularitást elegendő egy NVA-t mutatni. Az ötlet az, hogy „nemdeterminisztikusan kivárjuk” amíg a megfelelő 1 nem jön, innen a 0-kat számoljuk modulo 4 (az esetleg közben jövő 1-ek nem változtatnak az aktuális állapoton). Amikor a 4-gyel osztható darab 0 után egy 1 jön, akkor elfogadó állapotba megyünk, és ott is maradunk, hiszen a szó már biztos jó. Egy lehetséges megoldás:



3. Adjon nemdeterminisztikus véges automatát, amely azokat a szavakat fogadja el, amiben szerepel az 10100 részszo!

Megoldás:

Az ötlet az, hogy a kezdőállapotban várunk amíg a megfelelő részhez érünk (tehát a kilépés nemdeterminisztikus lesz). Utána egy állapotláncon végigmenve ellenőrizzük a minta meglétét (ha közben „hibás” karakter jön, akkor a számítás elakad). A megtalált minta után bármi jön, el kell fogadni a szót, azaz ebben az elfogadó állapotban maradunk, bármi is érkezik. Egy lehetséges megoldás:



4. Bizonyítsa be, hogy minden olyan NVA, ami nem fogadja el az ε -t, átalakítható úgy, hogy ugyanazt a nyelvet ismerje fel, de pontosan egy elfogadó állapota legyen.

Megoldás: Ha nem fogadja el az ε -t, akkor a kezdőállapot nem elfogadó. Vegyünk fel egy új f állapotot. Ha valamilyen nyíl F -beli állapotba mutat, akkor vegyünk fel e mellé egy olyat is, ami ugyanonnan indul, de f -be mutat. Azaz, ha $\delta(r,a) \cap F \neq \emptyset$ valamilyen $r \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén, akkor legyen $\delta'(r,a) = \delta(r,a) \cup f$, különben $\delta'(r,a) = \delta(r,a)$. Valamint legyen $\delta'(f,a) = \emptyset$ minden $a \in \Sigma$ esetén és $F' = \{f\}$.

Ha az eredeti automatában van egy szóra elfogadó számítás, akkor az utolsó lépést (és van utolsó lépés, mert az üres szót nem fogadjuk el) az újra cserélve egy elfogadó számítást kapunk M' -ben. Ez fordítva is igaz. (Ha $F = \emptyset$, akkor f nem lesz elérhető.)

5. Egy L nyelvből az L^R nyelvet úgy kapjuk, hogy minden L -beli szót megfordítunk, azaz fordított sorrendben írjuk le a karaktereket. Bizonyítsa be, hogy ha L reguláris, akkor L^R is az.

Megoldás: Ha L reguláris, akkor van hozzá NVA (ami lehet persze DVA is egyben). Ebből az előző feladat megoldása szerint készítünk egy olyan NVA-t amiben 1 elfogadó állapot van. Ha a nyelv tartalmazza az ε -t, akkor a fenti módszerrel olyan NVA készíthető, amiben két elfogadó állapot van, a kezdő q_0 és ez az új f állapot, amibe csak befele mennek nyilak. Végül ebben az új NVA-ban megfordítunk minden nyilat, legyen $q'_0 = f$ és ha $\varepsilon \notin L$, akkor $F' = \{q_0\}$, ha pedig $\varepsilon \in L$, akkor $F' = \{q_0, f\}$.

Világos, hogy egy nemüres szó elfogadó számítási útvonalán visszefelé haladva egy olyan számítási utat kapunk, ami a fordított szót fogadja el és az ε -t is jól kezeljük.

6. Legyen $\Sigma = \{a, b\}$ és álljon L azokból a szavakból, melyekben az a és a b betűk száma megegyezik. Reguláris-e ez az L nyelv?

Megoldás: Nem. Indirekt bizonyítunk, az előadáson az $\{a^n b^n\}$ nyelvre elmondott bizonyítás itt is bizonyít.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az L nyelv reguláris, azaz van olyan M determinisztikus véges automata, ami L -et fogadja el. Jelölje t az M állapotainak számát. Tekintsük a $0, 1, 2, \dots, t$ hosszú, csupa a betűből álló szavakat. Mivel csak t állapot van, ez a $t + 1$ szó között van legalább kettő, amelyek ugyanabban az állapotban érnek véget. Ha a k és az ℓ hosszú a -sorozat is a q állapotban ér véget ($k \neq \ell$), akkor innen folytatva k darab és ℓ darab b betűvel is elfogadó állapotba kell érjünk. Viszont ekkor az $a^k b^\ell$ szóval is elfogadó állapotba jutunk, pedig ez nincs is a megadott nyelvben.

7. Álljon az ábécé a nyitó és a csukó zárójelből. Igazolja, hogy a helyes zárójelsorozatokból álló nyelv nem reguláris!

Megoldás: Az 6. feladat bizonyítása itt is érvényes, csak az a helyett nyitó, a b helyett csukó zárójellel.

Fontos: Nem jó bizonyítás: Ez (az eltérő abc -től eltekintve) az 6. feladat nyelvének részhalmaza. Mivel az nem reguláris, ez sem az. **Általában nem igaz, hogy egy nem reguláris nyelvet tartalmazó nyelv sem reguláris!** Miért?

8. Reguláris-e az a nyelv, ami az olyan, csupa 0 sorozatból áll, amelyeknek a hossza

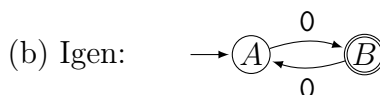
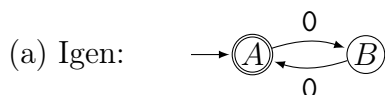
(a) páros szám?

(b) páratlan szám?

(c) négyzetszám?

(d) kettő hatvány?

Megoldás:



A (c) és (d) esetén a válasz nem: gondoljuk meg, hogyan néz ki egy DVA ha csak egy elemű az ábécé! Minden állapotból egyetlen nyíl (átmenet) indul ki. A kezdőállapotból a gráfban van egy mondjuk t hosszú út, aminek utolsó csúcsán vagy egy hurok van vagy innen az él visszamutat egy korábbi állapotba. Tehát a gráf egy kezdeti útból és egy az út végén levő körből áll (az út lehet 0 hosszú, a kör meg 1 hosszú, utóbbi ha hurok van). Ha nincs elfogadó állapot a körön, akkor csak véges sok különböző szót tud elfogadni. Ha van (lehet akár több is), akkor végtelen sok szót. Méghozzá, ha c jelöli a kör hosszát, és $0^k \in L$ egy a körön levő elfogadó állapotban ér véget, akkor körbe érve $0^{k+c} \in L$ is teljesül. Ezért az nem fordulhat elő, hogy egy adott nyelvnél az elfogadott szavak hosszai között tetszőlegesen nagy ugrás előforduljon.

A korábbi bizonyítási technika is működik, például így ha t állapota van a DVA-nak, akkor vegyük a nyelv $t + 1$ darab legrövidebb szavát. Biztos van közöttük kettő, ami ugyanabban az (elfogadó) állapotban ér véget. Tegyük fel, hogy $|w_1| = k^2$ és $|w_2| = \ell^2$ ugyanabban a q állapotban végződik és $k < \ell$. Ha q -ból még $2k + 1$ lépést teszünk, akkor elfogadó állapothoz kell jussunk, hiszen ha a w_1 -et folytatjuk, akkor egy $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ hosszú szót kapunk. Viszont ha a w_2 -t folytatjuk, akkor is elfogad az automata, pedig a szó hossza $\ell^2 + 2k + 1 < \ell^2 + 2\ell + 1 = (\ell + 1)^2$, és mivel ugyanakkor nagyobb mint ℓ^2 , ezért nem négyzetszám.

A (d)-re ugyanez az ötlet (de más számolás) működik.

9. Legyen az ábécé $\Sigma = \{0, 1\}$. Határozza meg az alábbi reguláris kifejezésekhez tartozó nyelveket!

(a) $(0 + 1)^* 011(0 + 1)^*$

(b) $1(0 + 1)^* 0$

(c) $((0 + 1)(0 + 1))^*$

Megoldás: (a) A 011 -et tartalmazó szavak. (b) Az 1 -gyel kezdődő és 0 -ra végződő szavak. (c) A páros hosszú szavak (tetszőleges kettő hosszú szavakból rakunk egymás után valahány, akár nulla darabot).

10. Adjon reguláris kifejezést azokra a nyelvekre, amelyek a $\{0, 1\}$ ábécé felett a következő szavakból állnak!

- (a) páratlan hosszú szavak;
- (b) páros hosszú nem üres szavak, melyeknek első és utolsó karaktere is 1;
- (c) legalább 3 db 0-t tartalmazó szavak;
- (d) páros sok 0-t tartalmazó szavak;
- (e) a 0-val kezdődő és páratlan hosszú, valamint az 1-gyel kezdődő és páros hosszú szavak;
- (f) a 00 részsztót tartalmazó páratlan hosszú szavak.

Megoldás: (a) Az üres szó nem jó. Tetszőleges első karakter után egy tetszőleges páros hosszú szó következik: $(0 + 1)((0 + 1)(0 + 1))^*$ (vagy persze az utolsó karaktert is levághatjuk az első helyett).

(b) Az első és utolsó karakter között tetszőleges páros hosszú szó állhat: $1((0 + 1)(0 + 1))^*1$

(c) A három kiválasztott 0 karakter előtt, után és között is bármi állhat: $(0 + 1)^*0(0 + 1)^*0(0 + 1)^*0(0 + 1)^*$

(d) A 0-kat párosával tesszük le, két szomszédos között, előttük, utánuk tetszőleges számú 1 állhat: $(1^*01^*)^*1^*$ (a legvégén lévő 1^* -ra azért van szükség, hogy nulla darab 0-ra is működjön), vagy pl. a 0-k után álló 1-eket elhagyhatjuk, a következő pár elején úgyis van 1^* , ilyenkor a legvégén lévő 1^* gondoskodni arról, hogy végződhessen valahány egyesre is: $(1^*01^*0)^*1^*$.

(e) Azt, hogy a két lehetőség legalább egyike teljesül a két reguláris kifejezés összege fejezi ki: $0((0 + 1)(0 + 1))^* + 1(0 + 1)((0 + 1)(0 + 1))^*$.

(f) Vagy páros sok karakter van a 00 előtt és akkor utána páratlan, vagy előtte van páratlan és utána páros, azaz $((0 + 1)(0 + 1))^*00(0 + 1)((0 + 1)(0 + 1))^* + (0 + 1)((0 + 1)(0 + 1))^*00((0 + 1)(0 + 1))^*$, vagy kicsit másként csoportosítva, valamivel rövidebben: $((0 + 1)(0 + 1))^*(00(0 + 1) + (0 + 1)00)((0 + 1)(0 + 1))^*$.

11. Adjon olyan reguláris kifejezéseket, amelyek rövidebbek az itt szereplőknél, de ugyanazt a nyelvet írják le!

- (a) $(0 + \varepsilon)^*$ (b) $((0 + \varepsilon)(0 + \varepsilon))^*$ (c) $(0 + 1)^*01(0 + 1)^* + 1^*0^*$

Megoldás: (a) A kifejezés tetszőleges számú 0-t generál, a 0^* is pont ezt csinálja.

(b) A két zárójel együtt nulla, egy vagy kettő 0 karaktert ad, ezt lehet tetszőleges számszor ismételni, azaz minden, 0-kból álló szót generál, ami leírható a 0^* kifejezéssel is.

(c) A leírt szavak: van benne 01 vagy előbb 1-ek és utána 0-k állnak (vagyis nincs benne 01), azaz bármilyen szó lehet, tehát a $(0 + 1)^*$ jó.

12. Adjon reguláris kifejezést arra a nyelvre, ami az összes, az 110 részsztót nem tartalmazó $\{0, 1\}$ feletti szóból áll!

Megoldás: A reguláris kifejezésnél nincs művelet a kivonásra, azt kell kitalálnunk, hogyan néznek ki a megengedett szavak. Egy ilyen szó állhat csupa 0-ból, vagy kezdődhet tetszőleges számú 0 karakterrel (akár nulla darabbal is). Ha van benne 1, akkor két 1 között kell legyen 0, kivéve, ha a szó végén vagyunk, ott akárhány 1 lehet egymás után. Ha nincs két 1 egymás után, akkor a végén még lehetnek 0-k. Ezek alapján egy lehetséges megoldás: $0^*(\varepsilon + 1(0^*01)^*(0^* + 1^*))$, vagy egy elegánsabb: $(0 + 10)^*1^*$.