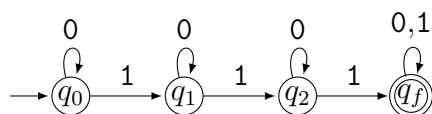


Ha a feladat mást nem említ, akkor legyen $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Adjon meg egy determinisztikus véges automatát, amely azokat a szavakat fogadja el, amelyekben szerepel legalább 3 darab 1-es. Az automata lehet hiányos is.

Megoldás:

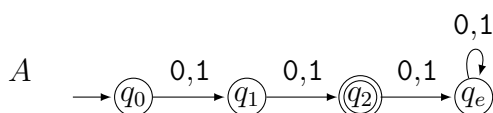


Könnyen látható indukcióval, hogy az automata pontosan akkor van a q_i ($i = 0, 1, 2$) állapotban, ha az input addig elolvasott részében pontosan i darab 1-es van. q_f -ben pedig pontosan akkor, ha már 3 vagy több 1-es volt.

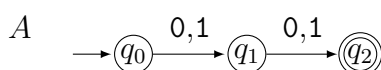
- Adjon meg egy-egy determinisztikus véges automatát a következő nyelvekhez:

- $A = \{w \mid |w| = 2\}$
- $B = \{w \mid w \text{ első és utolsó karaktere megegyezik}\}$
- $C = \{w \mid \text{minden } 0 \text{ után } 11 \text{ következik}\}$
- $D = \{w \mid |w|^2 - 5|w| + 6 = 0\}$
- $E = \{w \mid w\text{-ben pontosan egy } 00 \text{ részszo van}\}$

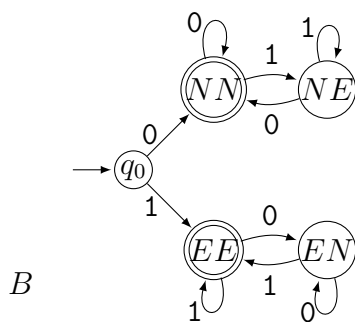
Megoldás:



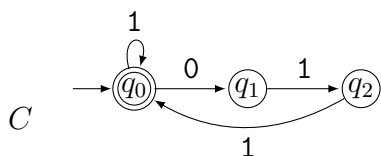
Könnyen látható indukcióval, hogy az automata pontosan akkor van a q_i ($i = 0, 1, 2$) állapotban, ha az input addig elolvasott részében pontosan i darab karakter van. q_e -ben pedig pontosan akkor, ha már 3 vagy több karakter volt.



Az előző automatából törölve a q_e állapotot egy hiányos automatát kapunk, aminek nyilván ugyanaz a nyelve.



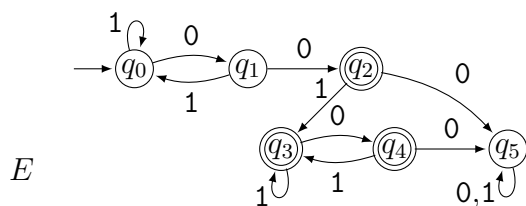
Könnyen látható, hogy ha az input 0-val kezdődött, akkor végig az NN vagy NE állapotban lesz az automata, ha pedig 1-el kezdődött, akkor az EE vagy EN állapotban lesz. Az állapot második karaktere pedig azt jelzi, hogy mi volt az utoljára olvasott karakter.



Ez egy hiányos automata. Indukcióval belátjuk, hogy az automata mindig q_0 -ban van, ha eddig minden 0 után 11 következik. Ha most 1-et olvasunk, akkor ez továbbra is teljesül. Ha viszont 0 következik, akkor 11 esetén visszajut q_0 -ba, minden más esetben vagy elakad vagy megáll a q_1 vagy q_2 állapotban. (A feltételnek a szó végén is teljesülnie kell, nincs a nyelvben pl. 101.)



A másodfokú egyenlet megoldása után látható, hogy a nyelv a 2 és 3 hosszú szavakból áll. Az automata helyességének bizonyítása az A nyelv esetéhez hasonló.

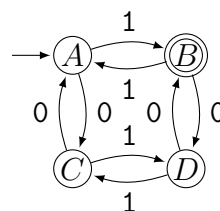


Látható, hogy az automata pontosan akkor kerül a q_2 állapotba, ha az utolsó két karakter 00 és korábban nem volt még 00 részszo. Ha most a következő karakter is 0 akkor van két 00 részszo. Ha viszont 1, akkor a q_2 állapotba kerül. Innen viszont pontosan akkor kerül a q_5 állapotba, ha megint lesz egy 00 részszo. Minden más esetben a q_3 vagy q_4 állapotban áll meg.

3. Adjon meg egy determinisztikus végés automatát, amely azokat a szavakat fogadja el, amelyekben páros sok nulla és páratlan sok egyes van!

Megoldás:

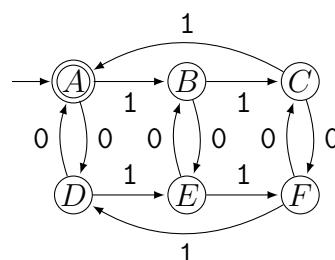
Az ötlet az, hogy számoljuk a nullák és egyesek paritását. Mivel mindegyikre kettő, azaz összesen négy lehetőség van, 4 állapota lesz a DVA-nak. A kezdőállapot (A), amikor mindkettőből páros van (a 0 páros szám!). Egy 0 hatására a nullák paritása, egy 1 hatására az egyesek paritása változik, ennek felelnek meg az átmenetek. Az elfogadó állapot (B), ahova páros sok nullával és páratlan sok egyessel jutunk.



4. Adjon meg egy determinisztikus végés automatát, amely azokat a szavakat fogadja el, amelyekben a nullák száma páros és az egyesek száma osztható 3-mal!

Megoldás:

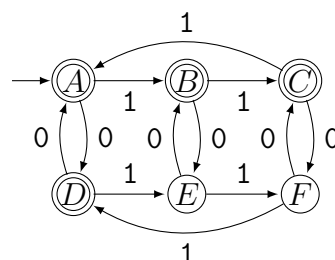
Az 3. feladathoz hasonló, de itt az egyeseket modulo 3 kell számolni. Az elfogadó állapot a kezdőállapot lesz.



5. Adjon meg egy determinisztikus végés automatát, amely azokat a szavakat fogadja el, amelyekben vagy a nullák száma páros vagy az egyesek száma osztható 3-mal!

Megoldás:

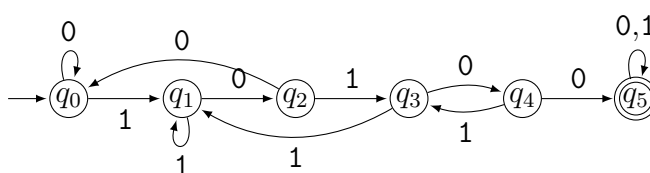
Az 4. feladathoz hasonló, csak most más lesz az elfogadó állapotok halmaza.



6. Adjon determinisztikus végés automatát, amely azokat a szavakat fogadja el, amiben szerepel az 10100 részszo!

Megoldás:

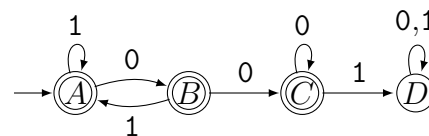
Az automata pontosan akkor lesz q_i állapotban, ha az utoljára olvasott i karakter megegyezik 10100 első i karakterével. Kivéve a q_5 -öt, mert akkor is ott lesz, ha már korábban előfordult a keresett részszo.



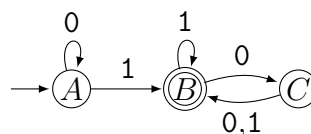
7. Adjon meg egy determinisztikus véges automatát, amely azokat a szavakat fogadja el, amelyekben **nem** szerepel a 001 részszo.

Megoldás:

Előbb felrajzolunk egy DVA-t, ami a komplementerét fogadja el, majd legyen $F' = Q - F$.



8. Mely szavakat fogadja el ez az automata? ($\Sigma = \{0, 1\}$)



Megoldás: Jellemezzük az egyes állapotokat a megfelelő nyelvekkel! Kicsit nézegetve az ábrát a következőkre juthatunk

L_A : az 1-t nem tartalmazó szavak.

L_B : van benne 1, és az utolsó 1 után páros sok 0 van,

L_C : van benne 1, és az utolsó 1 után páratlan sok 0 van.

Bizonyítás: $\varepsilon \in L_A$, és valóban kezdetben az A állapotban van. Az 1 hosszú szó vagy az A állapotba vagy a B állapotba vezet, a jellemzésnek megfelelően.

A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy egy szóval akkor és csak akkor jutunk az X állapotba, ha a szó az L_X nyelvbe tartozik. A szó hossza szerinti teljes indukcióval járunk el. A legfeljebb 1 hosszú szavakra már tudjuk, hogy ez igaz. Tegyük fel most, hogy a legfeljebb k hosszú szavakra a jellemzés helyes és tekintsünk egy $w = a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}$ szót. Három eset van, attól függően, hogy a k -edik karakter után melyik állapotban vagyunk.

az A állapotban: Ekkor eddig csupa 0 jött. Ha $a_{k+1} = 0$, akkor megmarad ez a tulajdonság és így $w \in L_A$, különben pedig $w \in L_B$. Vegyük észre, hogy az automata mozgása ennek megfelelő, az első esetben marad az A állapotban, a másodikban átlép a B -be.

a B állapotban: Az indukciós feltevés szerint mivel a B állapotban vagyunk a k -edik karakter után, ezért $a_1 \dots a_k \in L_B$, ami azt jelenti, hogy páros sok 0 van az utolsó 1 után. Ha a következő karakter 1, akkor ez a tulajdonság marad (nulla darab 0 lesz az utolsó 1 után), különben meg a végső 0-k paritása változik, $w \in L_C$. Megint látjuk, hogy az automata mozgása ennek megfelelő.

a C állapotban: hasonló az előzőhöz: az indukció szerint $a_1 \dots a_k \in L_C$, tehát volt már 1, és az utolsó 1 után páratlan sok 0 volt. Most ha egy 0 jön, akkor a végén levő 0-k paritása változik. Ha pedig 1 a következő karakter, akkor is átkerülünk L_B -be, hiszen a végén levő 0-k száma nulla lesz.

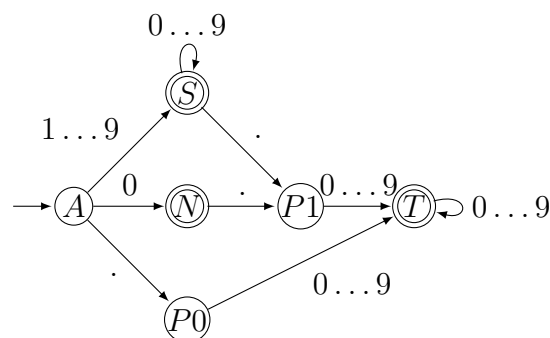
Azt láttuk, hogy minden esetben az automata mozgásának megfelelően kerülünk át egyik nyelvből a másikba. Mivel a három nyelv az összes szó egy partícióját alkotja, ezzel beláttuk, hogy ez a jellemzés helyes.

Az automata által elfogadott nyelv az elfogadó állapotnak megfelelő L_B nyelv, azaz az olyan szavak alkotják, amelyekben van 1, és az utolsó 1 után páros sok (akár 0 darab) 0 következik.

9. Készítsen olyan véges automatát, amely a tizedes tört alakban felírt racionális számokat fogadja el. (Σ a tizedespontból és a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből áll.) Az elfogadandó szám vagy tizedespont nélküli egész szám (pl. 123), vagy tartalmaz tizedespontot. Az utóbbi esetben azt is el kell fogadni, ha az egészrész hiányzik. (pl. helyes az 123.456 vagy a .456 is, de nem fogadható el 123. és ha a bemenet csak egyetlen pontból áll). Megköveteljük továbbá azt is, hogy az egészrész ne kezdődjön felesleges 0-kal (de pl. a 0.456 helyes).

Megoldás:

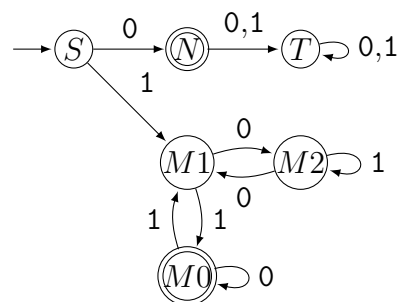
Itt az áttekinthetőség kedvéért egy lehetséges hiányos automatát adunk meg, ami szükség esetén a szokott módon teljessé tehető. Gondoljuk át, milyen állapotokra van szükség: a kezdőállapotból (A) átléphetünk egy a 0-t elfogadóba (N). Ha itt egy számjegy jön, akkor a bemenet helytelen, ezeket az átmeneteket elhagyjuk, és így a számítás elakad. A nullától különböző egész számokhoz egy másik állapot (S) tartozik. Itt maradunk bármilyen további számjegy esetén, és ez is elfogadó állapotot kell legyen. Ezzel az egész számokat kezeltük. Tizedespont jöhet N vagy S után, és a megfelelő állapot ($P1$) elutasító kell legyen. Vagy a tizedespont lehet a legelső karakter, ekkor viszont egy újabb állapotot kell, mert ez nem elfogadó ($P0$). Bármelyik változatban a tizedespont után jöhetnek még számjegyek, és ezekkel ismét elfogadó állapotba kerülünk (T). Ha egy újabb pont következik, akkor a bemenet hibás, ezt itt ismét elakadással jelezzük. Tehát a hiányos VA:



10. A jelsorozatokot tekintjük mint bináris számokat. Adjon véges automatát, amely pont a hárommal osztható számokat fogadja el! Vegye figyelembe, hogy szám 0-val nem kezdődik, kivéve maga a 0 és hogy a számokat a legmagasabb helyiértékű számjegytől kezdjük olvasni!

Megoldás:

A lehetséges 3 maradéknak egy-egy állapot feleljen meg. Az ezek közötti átmenetekhez vegyük észre, hogy ha a bináris alakban felírt x szám után egy 0-t írunk, akkor a szám értéke kétszerese lesz, ha pedig 1-et, akkor kétszerese+1. Ebből könnyen kiszámolható, melyik maradékosztályból melyikbe jutunk egy 0 vagy egy 1 hatására. Még arra kell figyelni, hogy ha az első karakter 0, akkor ezt elfogadjuk, de ha jön még utána valami, az már nem jó.



11. Az L_k nyelv álljon az olyan $\Sigma = \{a,b\}$ szavakból, amelyekben hátulról számítva a k -edik karakter b. Mutassa meg, hogy minden, az L_k nyelvet elfogadó determinisztikus véges automatának legalább 2^k állapota van!

Megoldás:

Mutatunk 2^k darab szót, amelyek közül semelyik kettő nem végződhet ugyanabban az állapotban. Ez garantálja, hogy kell legalább 2^k állapot. Vegyük az összes k hosszú szót. Ezekből pont 2^k darab van. Közülük tetszőleges w_1 és w_2 szóra teljesül, hogy van olyan $1 \leq i \leq k$, hogy hátulról az i -edik betűjük eltér, legyen mondjuk ez w_1 -ben a és w_2 -ben b . Egészítsük ki mindkét szót $k-i$ darab a betűvel. Az így kapott $s_1 = w_1 a^{k-i} \notin L_k$, hiszen hátulról a k -edik betűje a , míg $s_2 = w_2 a^{k-i} \in L_k$, mert itt meg ez a betű b .

Ráadás: Ezzel van egy alsó becslésünk a DVA méretére. Mekkora sikerül konstruálni?

12. Bizonyítsa be, hogy ha létezik olyan DVA aminek a nyelve $L_1 \subseteq \Sigma^*$ és olyan is amié $L_2 \subseteq \Sigma^*$, akkor létezik olyan DVA is, aminek a nyelve (a) $L_1 \cup L_2$, (b) $L_1 \cap L_2$, (c) $\overline{L_1}$.
(Feltesszük, hogy az összes DVA ugyanazt a Σ -t használja.)

Megoldás:

(a) Legyen M_1 egy DVA, aminek a nyelve L_1 , és $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$.

Legyen M_2 egy DVA, aminek a nyelve L_2 , és $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.

Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$, ahol

- $Q = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \text{ and } r_2 \in Q_2\}$,
- $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$ minden $(r_1, r_2) \in Q$, és $a \in \Sigma$ esetén,
- $q_0 = (q_1, q_2)$,
- $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ vagy } r_2 \in F_2\}$.

Indukcióval könnyen látható, hogy ha az input i -edik karaktere után M_1 az $r_i \in Q_1$ állapotban van, M_2 pedig az $r_j \in Q_2$ állapotban, akkor M az (r_i, r_j) állapotban lesz. Az is világos, hogy ha az inputot M_1 vagy M_2 elfogadja, akkor M biztosan F -beli állapotban áll meg. Más esetben viszont nem F -beli állapotban.

(b) A konstrukció lényegében megegyezik az (a)-ban ismertetett konstrukcióval. Az elfogadó állapotok halmazát kell csak másképp definiálni: $F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ és } r_2 \in F_2\}$.

(c) Ez esetben legyen $M = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, Q_1 - F_1)$. Ez épp a komplementer nyelvet fogja elfogadni, hiszen M_1 egy számítása az inputot pontosan akkor fogadja el, ha M egy nem F_1 -beli állapotban áll meg.