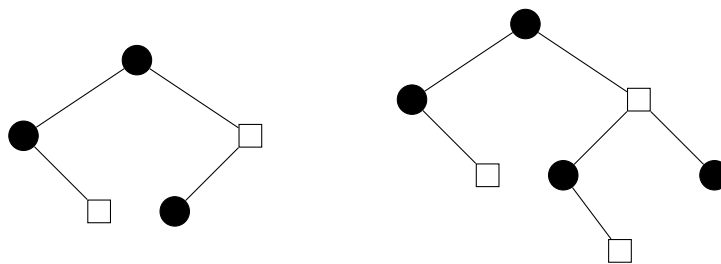


1. Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a posztorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3, x , 7, 5, y , 2. Mi lehet az x és mi az y ?
2. Határozza meg azokat a bináris fákat, amelyekben a preorder bejárás szerinti sorrend éppen a posztorder bejárás által adott sorrend fordítottja!
3. (a) Építsen beszúrásokkal bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: 7, 3, 2, 9, 8, 12, 6, 4.
(b) Járja be pre-, in-, és posztorder bejárással a kapott fát!
(c) Az (a) rész keresőfáján hajtsa végre az alábbi műveletsort: BESZÚR(5), TÖRÖL(2), TÖRÖL(7), TÖRÖL(6).
4. Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Mely x egész számokra lehetséges, hogy egy KERES(x) hívás során a keresési út mentén a 20, 18, 3, 15, 5, 8, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben?
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az inorder bejárást egy bináris keresőfára futtatjuk, akkor az elemeket rendezett sorrendben kapjuk meg.
6. Az A keresőfában n egész számot, a B -ben pedig m -et tárolunk. Rendezzük az $n+m$ elemet $O(n+m)$ lépésben!
7. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa, melyben csupa különböző elemeket tárolunk. Ennek minden v csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a v gyökerű részfában hány darab v -nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!
8. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa, melyben csupa különböző elemeket tárolunk. Ennek minden v csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a v gyökerű részfában hány darab v -nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!
9. Igazolja, hogy minden olyan algoritmus, ami csak összehasonlításokkal fel tud építeni egy bináris keresőfát n elem esetén $\Omega(n \log n)$ összehasonlítást használ!
10. Lehetséges-e hogy az alábbi ábrákon egy-egy piros-fekete fa csúcsait ábrázoltuk? (A levelek nincsenek feltüntetve, a fekete kör fekete csúcsot, a fehér négyzet piros csúcsot jelöl.)



11. Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű csúcsok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának a minimuma?
12. Mennyi a tárolható elemek számának minimuma, illetve maximuma egy olyan piros-fekete fában, aminek a fekete magassága 3?
13. Egy piros-fekete fában jelölje x és y a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy $\text{fm}(x) = \text{fm}(y)$, de az x csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű az y csúcs?

A 2-3 fák és a hashelés idén nem fértek bele az előadásba. Akit érdekel, a honlapon megnézheti a tudnivalókat, itt pedig pár gyakorló feladat következik.

14. Nyitott címréssel hash-elünk egy kezdetben üres $M = 11$ méretű táblába a $h(x) = x \pmod{M}$ hash-függvénnyel. Mi lesz a tábla állapota, ha a 4, 5, 14, 15, 16, 26, 3 kulcsokat a megadott sorrendben beszúrjuk és az ütközések feloldására
 - (a) lineáris próbát használunk?
 - (b) kvadratikus maradék próbát használunk?
 - (c) kettős hash-elést használunk, amikor $h'(x) = 7x \pmod{(M-1)}$ a második hash-függvény? Hány ütközés történt az egyes esetekben?
15. Előfordulhat-e nyitott címrészes hash-elés esetén, hogy az $n > 3$ méretű táblában csak 3 elem van, de a keresés lépésszáma n ?
16. Jó választás-e $M = 7$ méretű táblánál a $h(x) = x^2 \pmod{7}$ hash-függvény?
17. A $T[0 : M]$ táblában $2n$ elemet ($n < M/3$) helyeztünk el valamilyen hash-függvény segítségével, amikor azt tapasztaltuk, hogy az elemek mindegyike az első $3n$ hely egyikére került. Ha nem volt közben törlés és a végén a táblában minden $3i$ indexű hely üres maradt ($0 \leq i < n$), akkor legfeljebb hány ütközés lehetett, ha
 - (a) lineáris próbát használtunk?
 - (b) kvadratikus maradék próbát használtunk?
18. Egy m méretű hash-táblában már van néhány elem. Adjon $O(m)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy egy újabb elem lineáris próbával történő beszúrásakor maximum hány ütközés történhet!
19. A $b_0 \dots b_n$ alakú $n + 1$ hosszú bitsorozatot akarjuk tárolni. Tudjuk, hogy a b_0 paritásbit (ami a sorozatban az egyesek számát párosra egészíti ki). Ha nyitott címrészes hash-elést használunk $h(x) \equiv x \pmod{M}$ hash-függvénnyel és lineáris próbával, akkor $M = 2^n$ vagy $M = 2^n + 1$ méretű hash-tábla esetén lesz kevesebb ütközés?
20. Adjon egy 2-3-fát amely az 5,8,21,63 elemeket tartalmazza, majd sorban szűrje be a 69,32,7,23,25 elemeket!
21. Egy 2-3-fa gyökerének három fia van, a benne szereplő két érték 40 és 50. Mennyi lehet a tárolt elemek minimális, illetve maximális száma, ha tudjuk, hogy csak pozitív egész számokat tárol a fa?
22. Az $[1, 178]$ intervallumba eső összes egész számot egy 2-3-fában tároljuk. Tudjuk, hogy a gyökérben két útjelző van, és az első ezekből a 17. Mi lehet a második?
23. Egy 2-3-fában 4 elem van. Egyértelmű-e a 2-3-fa?