Schlotter Ildi
www.cs.bme.hu/~ildi/eszt

NP-teljesség, Kolmogorov-bonyolultság

Ahol nincs máshogy definiálva, ott $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Az alábbi L nyelvről mutassa meg vagy azt, hogy NP-teljes, vagy azt, hogy P-beli. L azon konjunktív normálformában álló SAT-formulák nyelve, melyekben
   a) minden változó (a negált alakjával együtt is) legfeljebb 5-ször szerepel.
   b) minden változó (a negált alakjával együtt is) legfeljebb 3-szor szerepel.
   c) minden változó (a negált alakjával együtt is) legfeljebb 2-szer szerepel.

2. Adjunk felső korlátot azon Σ^*-beli szavak Kolmogorov-bonyolultságára, melyek
   a) $n = 2^k$ darab 0-ból állnak valamely k természetes számra,
   b) pontosan három darab 1-est tartalmaznak.

3. Bizonyítsd be, hogy minden $x \in \Sigma^*$ szóra $C(xx) \leq C(x) + O(1)$.

4. Legyen n egy tetszőleges pozitív egész. Igazold, hogy létezik olyan m egész, melyre $n \leq m < 2n$, valamint $C(0^m) \geq \log n - 1$ teljesül!

5. a) Bizonyítsd be, hogy a Kolmogorov-bonyolultság nem monoton a szavak hosszára nézve, azaz létezik olyan $x, y \in \Sigma^*$, melyre $|x| > |y|$ de $C(x) < C(y)$.
   b) Bizonyítsd be, hogy a Kolmogorov-bonyolultság nem prefix-monoton, azaz létezik olyan $x, y \in \Sigma^*$, melyre $C(xy) < C(x)$.

6. Bizonyítsd be, hogy ha $x, y \in \Sigma^*$ szavakra $|x| = |y|$ fennáll, akkor
   a) $C(xy) \leq 2C(x) + C(y) + 2$.
   b) $C(xy) \leq C(x) + C(y) + O(\log(\min\{C(x), C(y)\}))$.

Házi feladat:

1. Bizonyítsd be, hogy ha $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ egy rekurzív és szürjektív függvény, akkor minden $x \in \Sigma^*$ szóra $|C(x) - C(f(x))| = O(1)$.

2. Létezik-e olyan Turing-gép, amely a bemenetén bináris alakban megadott tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ szám alapján kiszámol egy olyan $y \in \Sigma^*$ szót, melyre $|y| = n$ és $C(y) \geq n/2$?