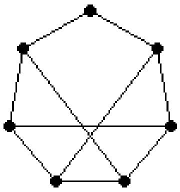
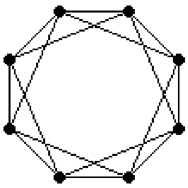
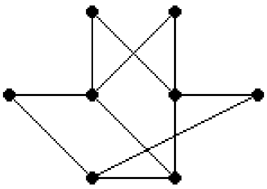
Wiener Gábor
wiener@cs.bme.hu

2. gyakorlat
Kromatikus szám

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát!

   a)  b)  c) 

2. Egy gráf csúcsai legyenek az 1 és 2009 közé eső egészek. Két csúcsot akkor kötünk össze, ha a különbségük legfeljebb 9. Mennyi a gráf kromatikus száma?

3. A G gráf csúcsai legyenek egy sakktábla mezői. Két csúcs akkor szomszédos G-ben, hogyha a megfelelő mezők egy lépésben elérhetők egymásból egy huszárral (bástyával). Mutassuk meg, hogy $\chi(G) = \omega(G)$.

4. Határozzuk meg az összes olyan n csúcsú, egyszerű G gráfot, melyre $\chi(G) = 3$, de bárhogy hagyunk el belőle egy csúcsot, a kapott G' gráfra $\chi(G') = 2$.

5. Határozzuk meg az összes olyan 6 csúcsú, egyszerű G gráfot, melyre $\chi(G) = 2$, de bárhogy húzunk be G-be egy új élet (két nemszomszédos csúcs közé), a kapott G' gráfra $\chi(G') > 2$.

6. a) Rajzoljunk olyan G gráfot, melyre $\omega(G) = 2$ és $\chi(G) = 4$.
   b) Rajzoljunk olyan 6 pontú G gráfot, melyre $\omega(G) = 3$ és $\chi(G) = 4$.
   c) Legyenek $a \leq b$ tetszőleges pozitív egészek. Van-e olyan G gráf, melyre $\omega(G) = a$ és $\chi(G) = b$?

7. Egy G egyszerű gráfban 2009 kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legfeljebb 2008. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2009$.

8. A G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek, két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek relatív prímek (vagyis legnagyobb közös osztójuk 1). Határozzuk meg G kromatikus számát.

---

9. Legyen $k \geq 2$ egész szám és G egy $2k+1$ pontú kör komplementere. Határozzuk meg $\chi(G)$ és $\omega(G)$ értékét!

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pontú és e élű egyszerű G gráfra igazak a következők:
    a) $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
    b) $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$.

11. Egy G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Az x és y csúcsok akkor szomszédosak, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét!

12. Legyen G és H két különböző gráf diszjunkt ponthalmazokkal. Készítsünk belőlük egy F gráfot úgy, hogy G minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(F) = \chi(G) + \chi(H)$!

13. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legfeljebb $\frac{e}{2}$ úgy, hogy a maradék gráf páros gráf legyen.

14. Adott a síkon néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem megy át egy ponton. Legyen G az ezek által meghatározott gráf: G csúcsai az egyenesek metszéspontjai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha az egyik egyenesen szomszédos metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.