Schlotter Ildikó
ildi@cs.bme.hu

13. gyakorlat
Gyűrűk, testek

1. Gyűrűt, testet vagy ferdetestet alkotnak-e az alábbi halmazok?

   a) a pozitív valós számok halmaza, a két művelet $a \oplus b = a \cdot b$ és $a \odot b = a^{\lg b}$

   b) a valós számok halmaza, a két művelet $a \oplus b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ és $a \odot b = a \cdot b$

   c) egy X halmaz összes részhalmazának halmaza, a két művelet $\oplus = \cup$ és $\odot = \cap$

   d) egy X halmaz összes részhalmazának halmaza, a két művelet $\oplus = \Delta$ és $\odot = \cap$. Itt Δ a szimmetrikus differencia jele, azaz $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. Vizsgáljuk a páros számok gyűrűjét.

   a) Mutassuk be példákon keresztül, hogy itt a felbonthatatlan és a prímtulajdonságú számok halmaza különbözik!

   b) Mutassuk meg, hogy itt nem teljesül a számelmélet alaptétele!

3. Egy $x \neq 0$ gyűrűelem baloldali nullosztó, ha $\exists y \neq 0$, hogy $xy = 0$. Legyen x_1 és x_2 baloldali nullosztó. Bizonyítsuk be, hogy x_1x_2 is baloldali nullosztó, de $x_1 + x_2$ nem feltétlenül az!

4. Legyen az R gyűrűben 0 az additív neutrális elem. Tetszőleges a, b elemekre lássuk be az alábbiakat!

   a) $0a = a0 = 0$

   b) $(-a)b = -(ab)$

5. Bizonyítsd be, hogy egy (kommutatív) testben minden elemnek legfeljebb két négyzetgyöke lehet, vagyis az $x = a^2$ egyenletnek legfeljebb két megoldása lehet a test tetszőleges a elemére.

---

6. Gyűrűt, testet vagy ferdetestet alkotnak-e az alábbi halmazok? Ha más nincs feltüntetve, akkor a két művelet a szokásos összeadás és szorzás.

   a) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ páros}\}$

   b) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, a \text{ páros}\}$

   c) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

   d) $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

   e) $\{\frac{a}{3^n} + b : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

   f) $\{0, 1\}$ a modulo 2 összeadással és szorzással

   g) a modulo m maradékosztályok a modulo m összeadással és szorzással

   h) a modulo m maradékosztályok a modulo m összeadással és szorzással, ha m prím

   i) az egész együtthatós polinomok

   j) a 4×4-es mátrixok

   k) a 4×4-es mátrixok, melyek determinánsa nem nulla, valamint a 4×4-es nulla mátrix

   l) az $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $a, b \in \mathbb{R}$

7. Tetszőleges (kommutatív) testben vezessük be a az $\frac{a}{b}$ jelölést az $a \cdot b^{-1}$ szorzat helyett. Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat!

   a) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

   b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$