Schlotter Ildi
ildi@cs.bme.hu

10. gyakorlat
Csoportelméleti alapfogalmak

1. Döntsd el, hogy az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve félcsoportot, csoportot illetve Abel-csoportot alkotnak-e!

   a) a páros számok halmaza, a művelet az összeadás

   b) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza, a művelet az unió

   c) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza, a művelet a szimmetrikus differencia, ahol A és B szimmetrikus differenciája: $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

   d) az egész számok halmaza, a művelet az $a \star b = a + b + 1$ képlettel adott $\star$ művelet

   e) a (-1)-től különböző valós számok, a művelet az $a \star b = ab + a + b$ képlettel adott $\star$ művelet

2. Adjuk meg az alábbi csoportok Cayley-tábláját!

   a) modulo 3 maradékosztályok a modulo 3 összeadásra nézve

   b) modulo 8 redukált maradékosztályok a modulo 8 szorzásra nézve

3. Egy szabályos ötszög csúcsait számozzuk meg az óramutató járásával ellenkező irányban 1-től 5-ig. Jelölje t_i az i-edik csúcson és a vele szemközti oldal felezőpontján átmenő tengelyre való tükrözést. Jelölje f_{72}, f_{144}, f_{216} és f_{288} az ötszög középpontja körüli, megfelelő szögű forgatást. Végül jelülje I az identitást. Végezd el a szabályos ötszög szimmetriacsoportjában az alábbi műveleteket!

   a) $f_{144} \cdot t_1$

   b) $f_{72} \cdot t_2 \cdot f_{72} \cdot t_2$

   c) $(t_1 \cdot t_3)^{-1}$

4. Egy G csoportban minden elem négyzete az egységelem. Bizonyítsd be, hogy G Abel-csoport!

5. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges G csoport tetszőleges a és b elemére $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ teljesül!

6. Van-e olyan 20 rendű csoport, melyben van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem?
   És van-e olyan 20 rendű csoport, melyben van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?

7. A G csoport a, b és c elemei különböznek az e egységtől és $a^3 = b^5 = c^7 = e$. Lássuk be, hogy G-nek legalább 100 eleme van.

8. Legyenek a G csoport elemei az 1,2,3,4,5,6 számok, a művelet pedig a modulo 7 szorzás. Igazoljuk, hogy a G csoport ciklikus! Adjuk meg a részcsoportjait!

9. Hány részcsoportja van a 15 rendű ciklikus csoportnak?

---

10. Döntsd el, hogy az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve félcsoportot, csoportot illetve Abel-csoportot alkotnak-e!

    a) az egész számok halmaza, a művelet az összeadás

    b) a síkvektorok halmaza, a művelet a vektorösszeadás

    c) az összes n-edik komplex egységgyök, a művelet a szorzás

    d) négyzetes mátrixok, a művelet a mátrixszorzás

    e) négyzetes nemszinguláris mátrixok, a művelet a mátrixszorzás

    f) négyzetes 1 determinánsú mátrixok, a művelet a mátrixszorzás

    g) a $0, \ldots, n-1$ számok, a művelet a modulo n összeadás

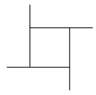
    h) a $0, \ldots, n-1$ számok, a művelet a modulo n szorzás

    i) a $1, \ldots, n-1$ számok, a művelet a modulo n szorzás

    j) a $\{\text{tik}, \text{tak}\}$ halmaz, a művelet az $x \star y = \begin{cases} \text{tik}, & \text{ha } x = y \\ \text{tak}, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ képlettel megadott $\star$ művelet.

k) a $\{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Q}, a^2+b^2 \neq 0\}$ számhalmaz, a művelet a szorzás

11. Határozd meg az alábbi geometriai elemek szimmetriacsoportját úgy, hogy nevet adsz az elemeiknek, és felírod a műveleti táblát!

    a) téglalap
    b) kocka
    c) szabályos háromszög
    d) szabályos tetraéder
    e) paralelogramma
    f) deltoid
    g) 

12. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!

13. Az alábbi következtetések közül melyek teljesülnek minden csoportban?

    a) $ax = ay \Rightarrow x = y$
    b) $abx = aby \Rightarrow x = y$
    c) $ax = 1 \Rightarrow x = a^{-1}$
    d) $xa = ya \Rightarrow x = y$
    e) $axb = ayb \Rightarrow x = y$
    f) $abx = 1 \Rightarrow x = a^{-1}b^{-1}$
    g) $xa = ay \Rightarrow x = y$
    h) $bxa = ayb \Rightarrow x = y$
    i) $abx = 1 \Rightarrow x = b^{-1}a^{-1}$

14. Legyen G egy csoport, és $G_1 \leq G$, $G_2 \leq G$. Igazak-e a kövekező állítások?

    a) $G_1 \cup G_2 \leq G$
    b) $G_1 \cap G_2 \leq G$

15. Mik a részcsoportjai az n rendű ciklikus csoportnak? Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport részcsoportja is ciklikus!

16. Legyen K és H a G csoport két részcsoportja úgy, hogy K rendje és H rendje relatív primek. Bizonyítsuk be, hogy K-nak és H-nak csak az egységelem a közös eleme.