

9. gyakorlat Sajátérték, sajátvektor; komplex számok

- Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és a legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektorokat.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- Bizonyítsuk be, hogy ha az A invertálható mátrixnak sajátértéke a λ valós szám, akkor $\lambda \neq 0$ és az A mátrix A^{-1} inverzének sajátértéke lesz az $\frac{1}{\lambda}$ szám.
- Az $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformációnak a -1 sajátértéke. Igaz-e, hogy $\mathcal{A}^3$ -nek is sajátértéke a -1 ?
- Legyenek A és B $n \times n$ -es valós mátrixok, $\mathcal{A}$ egy lineáris transzformáció. Mely állítások igazak?
 - Ha λ sajátértéke A -nak és B -nek is, akkor sajátértéke AB -nek is.
 - Ha $\underline{v}$ sajátvektora A -nak és B -nek is, akkor sajátvektora AB -nek is.
 - Ha $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}$ -nak, akkor $\underline{v} \in \text{Ker } \mathcal{A} \cup \text{Im } \mathcal{A}$.
 - Ha $\underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}^2$ -nek, akkor sajátvektora $\mathcal{A}$ -nak is.
 - Ha 0 sajátértéke $\mathcal{A}^2$ -nek, akkor sajátértéke $\mathcal{A}$ -nak is.
 - Ha λ^2 sajátértéke $\mathcal{A}^2$ -nek, akkor λ vagy $-\lambda$ sajátértéke $\mathcal{A}$ -nak.
- Bizonyítsd be, hogy ha egy $n \times n$ -es mátrixnak n különböző sajátértéke van, akkor
 - a sajátértékek szorzata a mátrix determinánsa.
 - a sajátértékek összege a mátrix *nyoma* (azaz főátlóbeli elemeinek összege).
- Számítsuk ki A^k sajátértékeit és sajátvektorait minden $1 \leq k \leq n-1$ esetre, ha A -ra teljesül, hogy

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$
- Van-e olyan lineáris transzformáció a síkban, illetve a térben, melynek nincs sajátvektora?
- Egy n dimenziós vektortéren értelmezett $\mathcal{A}$ lineáris transzformációnak minden nemnulla vektor sajátvektora. Legfeljebb hány különböző sajátértéke lehet $\mathcal{A}$ -nak?
- Legyenek a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ az $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformációnak olyan sajátvektorai, melyek közül bármely kettőhöz különböző sajátérték tartozik. Bizonyítsd be, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ lineárisan független!
- Számold ki az alábbi komplex számok értékét:

a) $\frac{2+2i}{3-4i}$

b) $\left| \frac{6+3i}{6-3i} \right|$

c) $\frac{(1+i)^{2010}}{(1-i)^{2009}}$

d) $(i-1)^{50}$

e) $(i-\sqrt{3})^9$

f) $\sqrt[3]{\frac{56-8i}{1+7i}}$

g) $\sqrt[5]{2i-\sqrt{12}}$

h) $(1-i)^{2010} - i(1+i)^{2012}$
- Határozzuk meg a z komplex számot, ha tudjuk, hogy $z^n = 1$ és $z^m = z + 2$ teljesül valamely n és m pozitív egészekre.
- Határozd meg az n -edik egységgyökök összegét és szorzatát!
- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $z^3 + 8 = 0$

g) $z^4 - 3z^2 - 1 = 0$

b) $z^2 = i|z|$

h) $z + \bar{z} = 2|z|$

c) $z^2 = iz$

i) $\bar{z} = z^{2010}$

d) $z^2 - 1 - \sqrt{3}i = 0$

j) $z^2 - 12z + 13 - 4i = 0$

e) $|z| = 2z + i$

k) $z(1+i) - \bar{z}(1-i) = 2i$

f) $z^2 - 5 + 12i = 0$

l) $z^2 + (1+i)\bar{z} + 4i = 0$
- A 777. egységgyökök közül minden lehetséges módon válasszunk ki 100-at, és szorozzuk őket össze. Mi lesz az így kapott $\binom{777}{100}$ szorzat összege?