8. gyakorlat
Lineáris leképezések és mátrixaik, képtér, magtér

1. Legyen V a valós síkvektorok tere. Egy $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációról tudjuk, hogy az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát a szokásos $\{(1, 0), (0, 1)\}$ bázisban.

2. A legfeljebb ötödfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak. Jelölje P_5 ezt a vektorteret. Döntsük el, hogy az alább definiált leképezés lineáris-e! Ha igen, írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban, és adjuk meg a képterét, magterét is!

   a) $\mathcal{A} : P_5 \to P_5$, és $\mathcal{A}(f(x)) = f_0(x)$, ahol $f_0(x)$ az azonosan 0 polinom.
   b) $\mathcal{A} : P_5 \to P_5$, és $\mathcal{A}(f(x)) = f_1(x)$, ahol $f_1(x)$ az azonosan 1 polinom.
   c) $\mathcal{A} : P_5 \to P_5$, és $\mathcal{A}(f(x)) = f'(x)$, ahol $f'(x)$ az $f(x)$ deriváltját jelöli.
   d) $\mathcal{A} : P_5 \to P_5$, és $\mathcal{A}(f(x))) = xf'(x)$, ahol $f'(x)$ az $f(x)$ deriváltját jelöli.
   e) $\mathcal{A} : P_5 \to P_5$, és $\mathcal{A}(f(x))) = \alpha f'(x) + \beta$, ahol $f'(x)$ az $f(x)$ deriváltját jelöli, valamint $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ből V_2-be, valamint $v_1, \dots, v_k \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a) Ha $v_1, \dots, v_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ generátorrendszer V_2-ben.
   b) Ha $v_1, \dots, v_k$ lineárisan függetlenek, akkor $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ lineárisan függetlenek.
   c) Ha $\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_k)$ lineárisan függetlenek, akkor $v_1, \dots, v_k$ lineárisan függetlenek.

4. Adjuk meg a p paraméter függvényében a $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2p \\ 1 & p & 2 \end{pmatrix}$ mátrixú lineáris leképezés képterét és magterét.

5. Az $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:
   i) tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.
   ii) tetszőleges 8 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.

   Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 13$.

6. Legyen A egy tetszőleges $m \times n$-es mátrix. Legyen $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \underline{x} = \underline{0}\}$. Bizonyítsd be, hogy W altér $\mathbb{R}^n$-ben és $\dim W = n - r(A)$.

7. Legyen $\mathcal{A}$ egy lineáris leképezés, és legyen A ennek egy tetszőleges bázispárban felírt mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy $r(A) = \dim Im\mathcal{A}$.

8. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos tere, és legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $(3, 1) \in Ker\mathcal{A}$.

9. Legyen az A mátrix által a V vektortéren megvalósított $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció olyan, hogy $Ker\mathcal{A}$ tartalmazza $Im\mathcal{A}$-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = 0$.

10. Legyen $\mathcal{A} : U \to V$ egy lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy az U és V vektorterekben megadható egy-egy bázis úgy, hogy $\mathcal{A}$ mátrixát ezek szerint felírva a kapott mátrixban a "főátlóban" (azaz ahol a sor- és oszlopindexek egyenlők) minden elem 1 vagy 0, a többi elem pedig 0.

11. Lássuk be a következőket:

    a) $\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} cosk\phi & -sink\phi \\ sink\phi & cosk\phi \end{pmatrix}$ tetszőleges k pozitív egészre
    b) $\{x$-tengelyre tükrüzés$\} \times \{y$-tengelyre tükrözés$\}$ = $\{$középpontos tükrözés$\}$
    (ahol a fenti transzformációk a kétdimenziós síkon értendők)

12. Legyen V egy 37 dimenziós vektortér, $\mathcal{A} : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Tudjuk, hogy $\dim Im\mathcal{A}^2 = 7$. Mennyi ezen feltétel mellett $\dim Ker\mathcal{A}$ lehetséges legkisebb értéke?

13. Bizonyítsd be, hogy ha A és B $n \times n$-es mátrixok, és $A \cdot B = 0$, akkor $r(A) + r(B) \leq n$.