# 7. gyakorlat
## Mátrixok rangja, lineáris leképezések

1. Mennyi a rangja az alábbi mátrixoknak a $c$ valós paraméter függvényében?

   a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & c \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & c \end{pmatrix}$

2. Legyen $A$ egy $6 \times 5$-ös mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   a) Ha az első 3 sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső $3 \times 3$-as aldetermináns 0.
   b) Ha a bal felső $3 \times 3$-as aldetermináns 0, akkor az első 3 sor lineárisan összefüggő.
   c) Ha az első 3 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 3 oszlop szintén, akkor $r(A) \leq 3$.
   d) Ha az első 2 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 2 oszlop szintén, akkor $r(A) \leq 3$.

3. Legyen $A$ egy $101 \times 101$-es mátrix. Jelölje $B$ az $A$ első 51 oszlopából álló mátrixot, és jelölje $C$ az $A$ utolsó 51 oszlopából álló mátrixot. Határozzuk meg $A$-nak az 51-edik oszlopát, ha tudjuk, hogy $r(A) = r(B) + r(C)$.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (de egymással összeszorozható) mátrixokra $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, ahol $r$-el a mátrixok rangját jelöljük.

5. Legyenek $A$ és $B$ $n \times m$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$, ahol $r$-el a mátrixok rangját jelöljük.

6. Legyen $A$ tetszőleges $m \times n$-es mátrix, $B$ pedig olyan $n \times n$-es mátrix, melyre $\det(B) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $r(AB) < n$.

7. Egy $100 \times 100$-as $\mathbb{R}$ feletti mátrix rangja 50. Elérhető-e mindig egy alkalmas elem megváltoztatásával, hogy a rang 49-re, illetve 51-re változzon?

8. Lineáris-e az az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés, amelyre tetszőleges $(u, v)$ vektor képe a következő:
   a) $\mathcal{A}((u, v)) = (-u, 2v)$
   b) $\mathcal{A}((u, v)) = (uv, v)$
   c) $\mathcal{A}((u, v)) = (4, 3u)$
   d) $\mathcal{A}((u, v)) = (u + v, 0)$

9. Egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Mit rendel $\mathcal{A}$ az $(5, 6)$ vektorhoz?

10. Legyen $U$ a legfeljebb 100-adfokú, valós együtthatós polinomok vektortere (ahol a polinomok összeadását és számmal szorzását értelemszerűen végezzük, így valóban vektorteret kapunk). Döntsük el, hogy az alábbi $U$-ból $U$-ba menő hozzárendelések lineáris leképezések-e!
    a) tetszőleges $f \in U$ polinom képe $f$ deriváltja
    b) tetszőleges $f \in U$ polinom képe az $a_0 \cdot x$ polinom, ahol $a_0$ az $f$ konstans tagja

11. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés $V_1$-ből $V_2$-be, valamint $v_1, \ldots, v_k \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
    a) Ha $v_1, \ldots, v_k$ generátorrendszer $V_1$-ben, akkor $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ generátorrendszer $V_2$-ben.
    b) Ha $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan függetlenek, akkor $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ lineárisan függetlenek.
    c) Ha $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ lineárisan függetlenek, akkor $v_1, \ldots, v_k$ lineárisan függetlenek.

12. Egy $k \times n$-es $D$ mátrixot akkor nevezünk diádnak, ha léteznek az $s_1, s_2, \ldots, s_k$ és az $o_1, o_2, \ldots, o_n$ számok úgy, hogy a $D$ mátrix $i$-edik sorának $j$-edik elem $d_{ij} = s_i \cdot o_j$. Egy tetszőleges $A$ mátrix esetén $d(A)$ jelölje azt, hogy minimum hány diád összegeként állítható elő $A$. Bizonyítsuk be, hogy $d(A) = r(A)$.