

6. gyakorlat

Mátrixok inverze, lineáris egyenletrendszerek és mátrixok kapcsolata

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, amennyiben léteznek!

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Igaz-e, hogy ha A , B és C $n \times n$ -es mátrixok, $A \neq 0$, valamint $AB = AC$, akkor $B = C$?
3. Határozzuk meg az $n \times n$ -es A mátrixot, ha tudjuk, hogy $A^2 = E$ és $\det(A - E) \neq 0$.
4. Melyek igazak az alábbiak közül?
- Ha az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható, akkor az $A|b$ kibővített mátrix oszlopai összefüggőek.
 - Ha az $A|b$ kibővített mátrix oszlopai összefüggőek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.
 - Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.
 - Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.
 - Ha az $Ax = 0$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor A oszlopai függetlenek.
 - Ha az $Ax = 0$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor A sorai függetlenek.
5. Egy $n \times n$ -es mátrix minden eleme páros egész szám. Bizonyítsd be, hogy ha A -nak van inverze akkor A^{-1} -nek legalább n eleme nem egész!
6. A és B két $n \times n$ -es mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
- Ha A -nak és B -nek létezik inverze, akkor AB -nek is.
 - Ha AB -nek létezik inverze, akkor A -nak és B -nek is.
 - Ha A -nak és B -nek létezik inverze, akkor $A + B$ -nek is.
 - Ha $A + B$ -nek és $A - B$ -nek létezik inverze, akkor $A^2 - B^2$ -nek is.

7. Mennyi s és t értéke, ha a következő egyenletrendszer megoldás egyértelmű:

$$\begin{aligned} sx + tz &= 0 \\ sx + sy + 4z &= 0 \\ sy + 2z &= 0 \end{aligned}$$

8. Az $n \times n$ -es A és B mátrixokra $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$.

9. Egy $n \times n$ -es nemnulla A mátrixot *nullosztónak* nevezünk, ha létezik olyan $n \times n$ -es nemnulla B mátrix, hogy $AB = 0$. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:

- Ha A nullosztó, akkor $\det A = 0$.
- Ha $\det A = 0$, akkor A nullosztó.

10. Legyen $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) négy tetszőleges pont a térben. Bizonyítsd be hogy ezek akkor és csak akkor vannak egy síkban, hogyha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Adjuk meg zárt alakban annak az $n \times n$ -es mátrixnak a determinánsát, melynek főátlójában mindenhol $2 \cos \varphi$ áll, a közvetlenül a főátló alatt vagy felett álló $2n - 2$ darab elem értéke 1, a mátrix többi eleme pedig 0.
12. Egyszer egy török szultán tömlöcbe vetett. A kezembe nyomott egy 100×100 -as mátrixot, és így szólt:

– Nem engedlek szabadon, amíg ennek a mátrixnak az inverzét ki nem számítod!

100 nap és 100 éjjel dolgoztam, míg végül a 101. nap reggelén büszkén jelentettem, hogy elkészültem. A török szultán egy pillantást vetett a munkámra, majd gonoszul felkacagott és azt mondta:

– A számolás hibátlan. Csak éppen rosszul másoltad le a feladatot! A mátrix jobb alsó sarkában álló elem hibás, nem az, amit én adtam! Most kezdheted előlről! Bruhaha!

Keserűen meg kellett állapítanom, hogy a szultánnak igaza volt. A 102. nap reggelén mégis kiszabadultam. Hogyan?