Bevezetés a számításelméletbe I. Táltos csoport
2010. október 4. Schlotter Ildi (ildi@cs.bme.hu)

5. gyakorlat
Determináns, mátrixok szorzása

1. A 100×100-as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A 100×100-as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az AB szorzatot!

2. Adjuk meg az alábbi mátrixok értékét! (A feladatokban n tetszőleges pozitív egész.)

   a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2009}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}^{2009}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n}$

3. Igaz-e, hogy bármely $n \times n$-es mátrixban van olyan elem, melyet megváltoztatva elérhető, hogy a mátrix determinánsa 0 legyen?

4. Igazoljuk, hogy ha az $n \times n$-es A mátrixnak minden eleme $+1$ vagy -1, akkor $\det(A)$ osztható 2^{n-1}-el.

5. Melyek igazak az alábbiak közül?

   a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.

   b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

6. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amire az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix esetén $AB = BA$ teljesül.

7. Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -E$ egyenlet? (X az ismeretlen mátrix.)

8. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Jelölje B azt az $n \times n$-es mátrixot, amelyre $b_{ij} = A_{ji}$, ahol A_{ji} az A mátrix a_{ji} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsát jelöli. Határozd meg az AB szorzatot!

9. Határozd meg az AB szorzatot, ha a 100×100-as A és B mátrixok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló a_{ij}, illetve b_{ij} elemek a következők:

   $a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{i+j}, & \text{ha } 1 \leq j \leq 50 \\ \sqrt{i+j-50}, & \text{ha } 51 \leq j \leq 100 \end{cases}$ $a_{ij} = \begin{cases} \sqrt[3]{j}, & \text{ha } 1 \leq i \leq 50 \\ -\sqrt[3]{j}, & \text{ha } 51 \leq i \leq 100 \end{cases}$

10. Határozzuk meg az összes olyan Y mátrixot amelyre $Y \cdot A = B$ teljesül, ahol az A és B mátrixok az alábbiak:

    $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 11 \\ -3 & -7 & 12 & -11 \\ 5 & 7 & -18 & 22 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 & 13 \end{pmatrix}$

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $A^2 + A + E = 0$ valamely A mátrixra, akkor $\det A \neq 0$. Számítsuk ki A^{2010}-et.

12. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen $n \geq 1$-re sem léteznek olyan A és B $n \times n$-es mátrixok, amikre $AB - BA = E$, ahol E a megfelelő méretű egységmátrixot jelöli.

13. Legfeljebb hány 1-es elem lehet a csak 0 és 1 elemekből álló $n \times n$-es A mátrixban, ha tudjuk, hogy $\det A \neq 0$?

14. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es A mátrixhoz létezik olyan $k \geq 1$ egész, amelyre $A^k = 0$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $A^n = 0$.