3. gyakorlat
Gauss-elimináció

1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek?

a) $\begin{pmatrix}1\\3\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\2\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\10\\13\\17\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\5\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}7\\9\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}33\\\sqrt{2}\\5\\\sqrt{7}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-51\\\pi\\\sqrt[3]{19}\\44\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\5\end{pmatrix}$

2. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n &= n-1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n &= n-2 \\ &\vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_n + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x - 9y + 2z - 5u - 3v &= 9 \\ 2y + 3u &= 9 \\ -2x - 4z + u + 6v &= 3 \\ 3x + 5y + 6z + 6u - 9v &= 8 \\ 8y + 6u &= 6 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 3 \\ 3x + y - 5z &= 0 \\ 4x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

3. Adjuk meg a t valós paraméter függvényében az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásait!

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= t \\ x - 8y + 9z &= 10 \\ 2x - y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

4. Határozzuk meg az a és b paraméterek függvényében az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

5. A t paraméter mely valós értékeire lesz az alábbi három síknak egynél több közös pontja?

$$\begin{aligned} S_1:\quad x + 2y + z &= 4 \\ S_2:\quad 2x + y + 8z &= 5 \\ S_3:\quad 5x + y + tz &= 11 \end{aligned}$$

6. Adjuk meg a p paraméter összes valós értékét, melyre az $x + y + z = 1$ és $2x + y = 3$ egyenletekkel megadott egyenes egy pontban metszi az $5x + 3y + pz = 11$ síkot!

7. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x-1981}{30} + \frac{x-1983}{28} + \frac{x-1985}{26} + \frac{x-1987}{24} = \frac{x-30}{1981} + \frac{x-28}{1983} + \frac{x-26}{1985} + \frac{x-24}{1987}$$

8. Tekintsünk az egész együtthatós lineáris egyenletrendszert (az egyenletekben a változók együtthatói és a jobb oldalon álló számok is egészek). Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a) Ha van megoldás a racionális számok körében, akkor van az egész számok körében is.

   b) Ha van megoldás a valós számok körében, akkor van a racionális számok körében is.

9. Az A mátrix sorait jelölje $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$, a $\underline{b}$ oszlopvektor komponenseit jelölje $b_1, \ldots, b_m$. Bizonyítsd be, hogy az $(A|b)$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha bármely $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ skalárok esetén a $\lambda_1\underline{a}_1 + \ldots \lambda_m\underline{a}_m = 0$ egyenlőségből $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$ is következik.