Bevezetés a Számításelméletbe I. — Második gyakorlat

TÁLTOS tankör, 2010. szeptember 13.

1. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}=\underline{0}$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül?

a) $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle = \langle \underline{a},\underline{c}\rangle$; b) $\langle \underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle = \langle \underline{a},\underline{c},\underline{d}\rangle$; c) $\langle \underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle = \langle \underline{a},\underline{d}\rangle$.

2. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\text{ és }\underline{d}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

a) Igaz-e, hogy $\underline{d}\in\langle \underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle$? b) Igaz-e, hogy $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ generátorrendszer?

c) Igaz-e, hogy $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ lineárisan független? d) Hány dimenziós az $\langle \underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\rangle$ generált altér?

3. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 3x+2y+z=0\right\}$$

(ZH, 2003. november 6.)

4. Legyen az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független egy V vektortérben. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$ vektorrendszer is biztosan lineárisan független? (ZH, 2009. december 1.)

5. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme! (ZH, 2002. október 31.)

---

6. Tegyük fel, hogy az $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\dots,\underline{u}_m$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet! (ZH, 2009. október 20.)

7. Legyen adott a térben az $\underline{a}=(2,5,1)$ és a $\underline{b}=(1,-1,3)$ vektor. Döntsük el, hogy az $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$ generált altér egyenest vagy síkot határoz-e meg és írjuk fel a kapott geometriai alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét. (ZH, 2008. október 21.)

8. Egy $\mathbb{R}^{100}$-beli vektort nevezzünk *egyenletesnek*, ha a számoszlop első 50 tagjának összege megegyezik a második 50 tag összegével. Bizonyítsd be, hogy az egyenletes vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^{100}$-ban és határozd meg ennek az altérnek a dimenzióját!

9. Legyenek $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ egy (tetszőleges) V vektortér vektorai. Vezessük be az $\underline{u}_1=\underline{v}_1$, $\underline{u}_2=\underline{v}_1+\underline{v}_2$, $\underline{u}_3=\underline{v}_1+\underline{v}_2+\underline{v}_3$, $\dots$, $\underline{u}_n=\underline{v}_1+\underline{v}_2+\dots+\underline{v}_n$ vektorokat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\dots,\underline{u}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ vektorok is lineárisan függetlenek. (ZH, 2008. október 21.)

10. Legyenek $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $\underline{v}_1-\underline{v}_2,\underline{v}_2-\underline{v}_3,\dots,\underline{v}_{k-1}-\underline{v}_k,\underline{v}_k-c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek! (ZH, 1998. november 5.)

11. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a}=\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{b}=\underline{u}+\underline{w}$, $\underline{c}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\underline{d}=p\cdot\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (ZH, 2004. december 14.)

12.a) Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a V (tetszőleges) vektortérben. Legyen továbbá $\underline{u}\in V$, $\underline{u}\neq\underline{0}$ a nullvektortól különböző, tetszőleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1\le i\le n$, amelyre a $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{u},\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n$ vektorok szintén generátorrendszert alkotnak! (ZH, 2006. október 26.)

b) Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszőleges) vektortérben. Legyen továbbá $\underline{u}\in V$, $\underline{u}\neq\underline{0}$ a nullvektortól különböző, tetszőleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1\le i\le n$, amelyre a $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{u},\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_n$ vektorok szintén lineárisan függetlenek! (ZH, 2006. november 9.)

13*. Megadható-e $\mathbb{R}^n$-ben végtelen sok vektor úgy, hogy közülük bármely n lineárisan független?