Táltos csoport
Schlotter Ildi (ildi@cs.bme.hu)

1. gyakorlat
Koordinátageometria, vektorterek

1. Írd fel a $P = (1, 4, -1)$ ponton átmenő és az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletrendszerét!

2. Határozzuk meg az $x + y + z = 5$ és a $2x - y - 2z = 3$ egyenletű síkok által meghatározott metszésvonalnak az xy síkba eső pontját!

3. Legyen $A = (1, 0, 0)$ és $B = (1, -2, 4)$, az e egyenes egyenlete pedig $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = z - 3$. Keressük meg az e egyenesen azon C pontot, melyre $|AC| = |BC|$ teljesül!

4. Határozd meg a $(2, 3, 4)$ pont távolságát a $3x + 4y + 12z + 25 = 0$ egyenletű síktól!

5. Határozd meg az $\frac{x-11}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+8}{-2}$ egyenletrendszerű egyenes távolságát az $\frac{x-10}{4} = \frac{y+8}{-9} = \frac{4-z}{4}$ egyenletrendszerű egyenestől!

6. A t paraméter mely valós értékére
   (a) lesz párhuzamos az $5x - 6y + 2z = 10$ egyenletű sík a $tx - 3y + z = 7$ egyenletű síkkal?
   (b) lesz merőleges az $\frac{x-5}{2} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z}{3}$ egyenes a $8x + ty + 12z = 19$ egyenletű síkra?
   (c) metszi az $\frac{x-5}{2} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z}{3}$ egyenes a $8x + ty + 12z = 19$ egyenletű síkot?

7. Döntsük el, hogy V a $\oplus$ és a $\odot$ műveletekkel (mint vektorösszeadással és skalárral való szorzással) vektorteret alkot-e, ahol:
   (a) V a racionális számok halmaza, $\oplus$ az összeadás és $\lambda \odot v = [\lambda \cdot v]$ ahol [ ] jelentése egészrész.
   (b) V a pozitív valósok halmaza, $u \oplus v = u \cdot v$ (azaz $\oplus$ a hagyományos szorzás) és $\lambda \odot v = v^{\lambda}$.

8. Döntsük el, hogy az összes valós számon értelmezett valós értékű függvények alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e a valós számok teste felett?
   (a) páros függvények
   (b) $\{f | f(5) \leq 0\}$
   (c) $\{f | f(5) = f(8)\}$

9. Vektorteret alkotnak-e azok az (x, y, z) hármasok, melyekre
   (a) $x + y - 2z = 0$?
   (b) $x + y - 2z = 5$?
   (c) $x = 1$?
   (d) $x, y, z \geq 0$?

10. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    (a) Kifejezhető-e skalárral való szorzás és összeadás segítségével az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{e}$ vektor?
    (b) Mely vektorok fejezhetők ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból?
    (c) Mely vektorok fejezhetők ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból?

11. Legyen V vektortér a T test felett. Bizonyítsd be a vektortér-axiómák segítségével a következőket:
    (a) $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ minden $\underline{v} \in V$ vektorra.
    (b) ha $\lambda\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{v} = \underline{0}$ vagy $\lambda = 0$.
    (c) a vektorösszeadás kommutativitása következik a többi hét vektoraxiómából.
    (d) az $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$ axióma *nem* következik a többi hét vektoraxiómából.

12. Nevezzünk egy n magas számoszlopot *unalmasnak*, ha a koordinátái között legfeljebb két különböző érték fordul elő. Legkevesebb hány unalmas vektor összegeként állítható elő az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ vektor?