Algoritmuselmélet
2011. március 19.

Schlotter Ildi
ildi@cs.bme.hu

6. gyakorlat
Bináris keresőfák, piros-fekete fák

1. Adjuk meg azt a bináris fát, melynek inorder és postorder bejárásai a következőt adják:
   Postorder: $8, 5, 12, 10, 1, 6, 2, 7, 11, 4, 3, 9$.
   Inorder: $8, 6, 5, 10, 12, 1, 9, 4, 2, 11, 7, 3$.

2. Egy bináris keresőfa "valamely bejárásán" mindig a $\{pre,\ in,\ post\}$-order valamelyikét értjük.
   a) Mely bejárásoknál lehetséges az, hogy a tárolt elemek legnagyobbika megelőzi a legkisebbet?
   b) Egy bináris keresőfában az $1, 2, \ldots, n$ számokat tároljuk, valamely bejárásánal a számok az $n, n-1, \ldots, 1$ sorrendben következnek. Melyik lehetett ez a bejárás és milyen lehetett ez a bináris keresőfa?

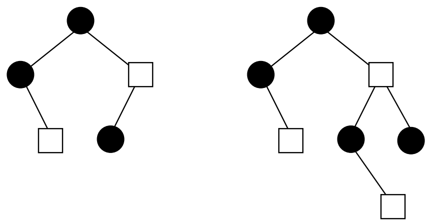
3. Az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja *magas*, ha az elemeket egy kezdetben üres bináris keresőfába a permutáció sorrendje szerint beszúrva a kapott keresőfa magassága n lesz. Hány magas permutáció van?

4. Egy l szintű bináris keresőfa csúcsaiban a kulcsokon és a részfák gyökereire mutató pointereken kívül tároljuk a megfelelő részfa súlyát (a csúcs leszármazottainak a számát). Tudjuk, hogy a kulcsok mind különbözőek. Adjunk minél hatékonyabb algoritmust egy olyan levél keresésére, aminek a k kulcsa a lehető legközelebb van a kulcsok rendezése szerinti középső kulcshoz! Elemezzük a módszer költségét!

5. Egy piros-fekete fa fekete magassága 8. Mennyi a fában tárolt elemek minimális illetve maximális száma?

6. Lehetséges-e, hogy az alábbi rajzokon egy piros-fekete fa belső csúcsait ábrázoltuk?

7. Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete fa tulajdonságainak megsértése nélkül
   a) néhány piros csúcsot átszínezünk feketére?
   b) valamelyik, de csak egy piros csúcsot átszínezünk feketére?
   c) egy piros csúcsot feketére, egy feketét pirosra színezünk át?
   (Mást nem változtatunk a fán.)



8. Egy gyökeres szintezett n csúcsú fán A és B a következő játékot játssza: felváltva mozgatnak egy bábut ami kezdetben az első szinten, a gyökérben van. Minden lépésben a soron következő játékos az aktuális v csúcsból v valamelyik fiába mozgatja a bábut. A játéknak akkor van vége, ha a bábu a fa egyik levelébe kerül. A levelek egy része zöldre van festve. A kezdő A játékos akkor nyer, ha a játék egy zöld levélben ér véget.

   Adott a fa éllistája, és egy tömb, ami a fa minden pontjára megmondja, hogy az zöld-e. Mutasson egy $O(n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy az A játékos hogyan játszon, hogy biztosan nyerjen (feltéve, hogy van ilyen nyerő stratégiája).

Gyakorlás:

1. Építsen beszúrásokkal bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: $7, 3, 2, 9, 8, 12, 6, 4, 5$.
   a) Törölje ki a $2, 6$ és 7 elemeket.
   b) Milyen sorrendben írja ki a preorder, inorder és posztorder bejárás a csúcsokat?

2. Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy KERES(x) hívás során a keresési út mentén a $20, 18, 3, 15, 5, 8, 9$ kulcsokat látjuk ebben a sorrendben? Ha igen, határozza is meg az x egész összes lehetséges értékét, amire ez megtörténhet!

3. Adott n pont a síkon, melyek páronként mindkét koordinátájukban különböznek. Bizonyítsuk be, hogy egy és csak egy bináris fa létezik, melynek pontjai az adott n pont, és az első koordináta szerint a keresőfa tulajdonsággal, a második szerint pedig a kupac tulajdonsággal rendelkezik.

4. Milyen lehet egy olyan piros-fekete fa alakja, amelyben az egy szinten levő elemek azonos színűek?

5. Két piros-fekete fában n_1 illetve n_2 számot tárolunk. Készítsen ezen számokból egyetlen rendezett tömböt $O(n_1 + n_2)$ lépésben!