

A számítástudomány alapjai

Extra tananyag: lineáris leképezések

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} .$$

Ha tehát az $\mathbb{R}^n$ tér vektorait egy A mátrixszal történő beszorzással átvisszük át az $\mathbb{R}^k$ térbe, akkor az így definiált leképezésre teljesülnek a fenti tulajdonságok. Ennek érdemes nevet adni, mert fontosak azok a függvények, amik rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal. Pontosan ezt tesszük meg az alábbi definícióban.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} .$$

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} .$$

Def: Tfh $U \subseteq \mathbb{R}^k$ és $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}.$$

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Példa: Lineáris leképezés $\mathbb{R}^2$ -ből $\mathbb{R}^2$ -be (a szokásos helyvektorokon) az origóra tükrözés, az origó körüli forgatás, az x tengelyre vetítés, vagy egy origón átmenő egyenesre tükrözés. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés például az, ha a sík minden (x, y) pontjához a tér $(2x, 0, y/2)$ pontját rendeljük.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} .$$

Def: Tfh $U \subseteq \mathbb{R}^k$ és $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} .$$

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixra az A -val történő beszorzás $\mathbb{R}^k$ -ből $\mathbb{R}^n$ -be ható lineáris leképezést definiál.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} .$$

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixra az A -val történő balszorítás $\mathbb{R}^k$ -ből $\mathbb{R}^n$ -be ható lineáris leképezést definiál.

Kínzó kérdés: Minden lineáris leképezés megadható mátrixszorzással?

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} .$$

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixra az A -val történő balszorozás $\mathbb{R}^k$ -ből $\mathbb{R}^n$ -be ható lineáris leképezést definiál.

Kínzó kérdés: Minden lineáris leképezés megadható mátrixszorzással?

Megnyugtató válasz: Igen.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire az alábbi tulajdonságok teljesülnek: $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ -re

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}.$$

Def: Tfh $U \subseteq \mathbb{R}^k$ és $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrixra az A -val történő balszorozás $\mathbb{R}^k$ -ből $\mathbb{R}^n$ -be ható lineáris leképezést definiál.

Kínzó kérdés: Minden lineáris leképezés megadható mátrixszorzással?

Megnyugtató válasz: Igen.

Ezt most igazolni fogjuk.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$
 f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$
 f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Biz: $\Rightarrow$: Mivel f additív és homogén, ezért

$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \dots + f(\lambda_k \underline{u}_k) = \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \dots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$, azaz f zárt a lineáris kombinációra.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$

f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Biz: $\Rightarrow$: Mivel f additív és homogén, ezért

$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \dots + f(\lambda_k \underline{u}_k) = \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \dots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$, azaz f zárt a lineáris kombinációra.

$\Leftarrow$: Ha f zárt a lineáris kombinációra, akkor

$f(\lambda \underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$, hisz $\lambda \underline{u}$ az $\underline{u}$ lineáris kombinációja, továbbá $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(1\underline{u} + 1\underline{v}) = 1f(\underline{u}) + 1f(\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$,

tehát f homogén is és additív is. Egyszóval f lineáris leképezés. □

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$
 f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$

f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$

f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Annak az igazolásához, hogy minden f lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorozással, elegendő csupán azt megmutatni, hogy van olyan $[f] = A$ mátrix, amire $f(\underline{b}_i) = A \underline{b}_i$ teljesül $\forall \underline{b}_i$ -re. Legyen ugyanis A ilyen mátrix és tegyük fel, hogy $\underline{u} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \dots$ tetszőleges. Ekkor a fentiek alapján $f(\underline{u}) = \lambda_1 f(\underline{b}_1) + \lambda_2 f(\underline{b}_2) + \dots = \lambda_1 A \underline{b}_1 + \lambda_2 A \underline{b}_2 + \dots = A \underline{u}$. Ezért minden $\underline{u}$ vektor f szerinti $f(\underline{u})$ képe megkapható az A mátrixszal történő balszorozással.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$

f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris leképzés, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$ f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris leképzés, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$ f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz:

Legyen $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m)$, és $C = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$. A Lemma állítása ekvivalens azzal, hogy van olyan A mátrix, amire $A \cdot B = C$. A mátrixszorzás különös tulajdonsága kapcsán azt láttuk, hogy pontosan akkor van ilyen A ha C minden sora előáll B sorainak lineáris kombinációjaként. Ezt fogjuk tehát most igazolni.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$

f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris leképzés, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz:

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$ f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz:

Mivel B bázis, ezért B oszlopai lineárisan függetlenek. Így a B ESÁ-okkal RLA mátrixszá transzformált alakja $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m)$, azaz I_m áll az RLA mátrix tetején. Ezért I_m minden sora előáll a B sorainak lineáris kombinációjaként. Minden m oszlopból álló mátrix, így C is megkapható I_m sorainak lineáris kombinációjaként. Tehát C sorai előállnak nem csak I_m , de B sorainak lineáris kombinációjaként is. □

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$ f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris leképzés, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$ f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetszőleges $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f] \underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

(Azaz minden lineáris leképezés megkapható mátrixszal történő balszorzásként.)

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$

f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris leképzés, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetszőleges $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f] \underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$ f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetszőleges $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f] \underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

Biz: Legyen $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$ az U altér egy bázisa. A fenti Lemma szerint van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f] \underline{b}_i = f(\underline{b}_i)$ teljesül minden báziselemre. Az $\underline{u} \mapsto [f] \underline{u}$ olyan lineáris leképezés, ami a $\underline{b}_i$ báziselemeken megegyezik f -fel. Mivel minden lineáris leképezést egyértelműen meghatároznak a báziselemek képei, ezért $f(\underline{u}) = [f] \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in U$. □

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$

f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris leképzés, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetszőleges $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f] \underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \text{ill.} \quad (2) f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \text{ teljesül.}$$

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés $\iff$ f zárt a lineáris kombinációra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lineáris lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetszőleges $f : U \rightarrow V$ lineáris leképezés esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f] \underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

Azt fogjuk most megfigyelni, hogyan is kell az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixát kiszámítani a báziselemek képeinek segítségével.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Megj: A fenti Állítás azt mondja ki, hogy az f lineáris leképezést balszorzással megvalósító $[f]$ mátrixot úgy kapjuk meg, hogy a standard bázis elemeinek képeit, mint oszlopvektorokat egy mátrixba rendezzük.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Biz: Azt kell megmutatni, hogy $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ -re.

Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i = (f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \dots, f(\underline{e}_n)) \underline{e}_i = f(\underline{e}_i)$

Ha tehát $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i$, akkor

$$[f]\underline{v} = [f](\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [f]\underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\underline{e}_i) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = f(\underline{v})$$

(A 2-dik és 4-dik egyenlőségénél f ill $[f]$ lineáris kombináció tartó tulajdonságát, a 3-diknál pedig a bizonyítás elején szereplő megfigyelést használtuk.) $\square$

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

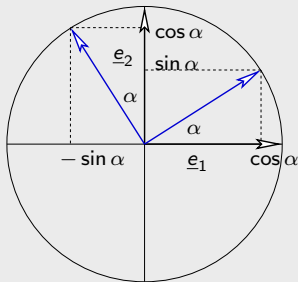
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.



Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Megj: A Lemma azt mondja ki, hogy lineáris leképezések egymásutánja olyan lineáris leképezés, aminek a mátrixa a két lineáris leképezés mátrixának a szorzata, ahol a bal oldali tényező a másodiknak elvégzett leképezés mátrixa.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Biz:

Először $g \circ f$ linearitását igazoljuk:

$g(f(\lambda \underline{u})) = g(\lambda f(\underline{u})) = \lambda g(f(\underline{u}))$ tehát $g \circ f$ homogén, ill.

$g(f(\underline{u} + \underline{v})) = g(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = g(f(\underline{u})) + g(f(\underline{v}))$ vagyis $g \circ f$ additív is.

Tehát $g \circ f$ csakugyan lineáris leképezés.

Végül a kompozíciómátrixról szóló képlet helyességét bizonyítjuk.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Biz:

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Biz:

A tanultak szerint $[g \circ f]$ i -dik oszlopa $g(f(\underline{e}_i)) = [g]([f]\underline{e}_i)$. Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i$ az $[f]$ i -dik oszlopa, így $[g]([f]\underline{e}_i)$ a $[g]$ mátrix szorzata az $[f]$ mátrix i -dik oszlopával.

Ez pedig nem más, mint az $[g][f]$ szorzatmátrix i -dik oszlopa.

Ezek szerint a $[g \circ f]$ mátrix i -dik oszlopa megegyezik a $[g][f]$ mátrix i -dik oszlopával ($\forall i$ -re), így aztán $[g \circ f] = [g][f]$. □

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Biz: Legyenek A, B ill. C az f, g és h lineáris leképezések mátrixai. Ekkor $A(BC)$ az $f \circ (g \circ h)$, $(AB)C$ pedig az $(f \circ g) \circ h$ leképezés mátrixa. Márpedig $f \circ (g \circ h)(\underline{v}) = f(g(h(\underline{v}))) = (f \circ g) \circ h(\underline{v})$ miatt e két leképezés megegyezik, így a mátrixaik is azonosak. □

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$ -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Köv: A fenti példában szereplő elforgatásokra igaz, hogy $f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \circ f_\beta$, így $\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = [f_{\alpha+\beta}] = [f_\alpha][f_\beta] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot$

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$$

Ebből pedig $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ill. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ adódik. □

Váratlan módszerrel igazoltuk a trigonometrikus függvények addíciós képletét.

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága
- ▶ Lineáris leképezés az, ami additív és homogén

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága
- ▶ Lineáris leképezés az, ami additív és homogén
- ▶ A báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága
- ▶ Lineáris leképezés az, ami additív és homogén
- ▶ A báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést
- ▶ Minden lineáris leképezés megkapható mátrixszal történő beszorzásként

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága
- ▶ Lineáris leképezés az, ami additív és homogén
- ▶ A báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést
- ▶ Minden lineáris leképezés megkapható mátrixszal történő beszorzásként
- ▶ A lineáris leképezés mátrixa megkapható a báziselemek képeinek mátrixba rendezésével

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága
- ▶ Lineáris leképezés az, ami additív és homogén
- ▶ A báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést
- ▶ Minden lineáris leképezés megkapható mátrixszal történő beszorzásként
- ▶ A lineáris leképezés mátrixa megkapható a báziselemek képeinek mátrixba rendezésével
- ▶ Lineáris leképezések egymásutánja lineáris leképezés

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága
- ▶ Lineáris leképezés az, ami additív és homogén
- ▶ A báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést
- ▶ Minden lineáris leképezés megkapható mátrixszal történő beszorzásként
- ▶ A lineáris leképezés mátrixa megkapható a báziselemek képeinek mátrixba rendezésével
- ▶ Lineáris leképezések egymásutánja lineáris leképezés
- ▶ Lineáris leképezések egymásutánjának mátrixa a lineáris leképezések mátrixainak szorzata

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága
- ▶ Lineáris leképezés az, ami additív és homogén
- ▶ A báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést
- ▶ Minden lineáris leképezés megkapható mátrixszal történő beszorzásként
- ▶ A lineáris leképezés mátrixa megkapható a báziselemek képeinek mátrixba rendezésével
- ▶ Lineáris leképezések egymásutánja lineáris leképezés
- ▶ Lineáris leképezések egymásutánjának mátrixa a lineáris leképezések mátrixainak szorzata
- ▶ Köv1: A trigonometrikus függvények addíciós képlete

Mit nem tanultunk meg lineáris leképezésekről az SzA kurzuson?

- ▶ A mátrixszorzás additív és homogén tulajdonsága
- ▶ Lineáris leképezés az, ami additív és homogén
- ▶ A báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lineáris leképezést
- ▶ Minden lineáris leképezés megkapható mátrixszal történő balszorzásként
- ▶ A lineáris leképezés mátrixa megkapható a báziselemek képeinek mátrixba rendezésével
- ▶ Lineáris leképezések egymásutánja lineáris leképezés
- ▶ Lineáris leképezések egymásutánjának mátrixa a lineáris leképezések mátrixainak szorzata
- ▶ Köv1: A trigonometrikus függvények addíciós képlete
- ▶ Köv2: A mátrixszorzás asszociativitása innen triviális