

Gráfok és algoritmusok

Gráfok minvágásainak reprezentációja

2025. május 6.

Miről lesz szó a mai előadáson?

- ▶ Gráfok minimális vágásainak rendszerét szeretnénk jobban megérteni és reprezentálni. Az a célunk a továbbiakban, hogy valamiféle kompakt módon tárolni tudjuk egy adott inputgráf esetén az összes csúcspárra az két csúcs egymástól való optimális elvágását.
- ▶ Az eredeti definíció szerint gráf vágása alatt olyan legszűkebb (nemüres) élhalmazt értünk, aminek elhagyása nyomán a gráf szétesik, azaz komponenseinek száma megnő. A továbbiakban mást értünk vágás alatt, konkrétan a csúcsok egy tetszőleges, valódi X részhalmazát (de valójában az X -ből kilépő élek $E(X)$ halmazára gondolunk). Így lehet olyan X , ami az utóbbi értelemben vágást határoz meg, de $E(X)$ nem alkot vágást az eredeti definíció szerint: vagy azért mert nem legszűkebb, vagy azért mert üres. Ez a különbség azért nem fog zavart okozni, mert összefüggő gráfok esetén az általunk vizsgált minimális vágások a két értelmezés szerint ugyanazt jelentik.

Terminológia

Def: Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $A \subseteq H$, akkor $\tilde{f}(A) := \sum_{h \in A} f(h)$ az részhalmazon képzett összegző függvényt jelöli.

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ pedig tetszőleges kapacitásfüggvény G élein.

Def: A G gráf **vágása** a V egy tetszőleges X valódi részhalmaza.

Az X **vágás éleinek** halmaza $E(X) := \{uv \in E : u \in X \not\subseteq v\}$.

Az X **vágás kapacitása** $c(X) := \tilde{c}(E(X))$.

Az X a G **minvágása**, ha $c(X) \leq c(X')$ teljesül a G bármely X' vágására, azaz ha az X vágás éleinek összkapacitása minimális.

Az X vágás **szeparálja** u -t és v -t, ha $|X \cap \{u, v\}| = 1$.

Ez u -t és v -t szeparáló vágást **uv -vágásnak** nevezzük.

E vágások min kapacitása a $\lambda_G^c(u, v)$ **lokális élösszefüggőség**.

A G **gráf élösszefüggősége** $\lambda_G^c(G) := \min\{\lambda_G^c(u, v) : u, v \in V\}$.

Def: Az $A, B \subseteq V$ halmazok akkor **keresztelők**, ha az $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, V \setminus (A \cup B)$ halmazok egyike sem üres.
A továbbiakban minvágások struktúrája és bármely két csúcsát szeparáló minimális vágások reprezentációja érdekel bennünket.
Első hasznos eszközünk egy egyszerű megfigyelésből adódik.

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

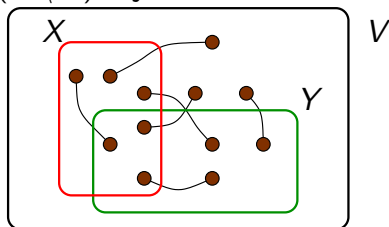
Biz:

(1) Minden él ugyanannyival járul hozzá mindét oldalhoz.

(2) Közvetlenül adódik (1)-ből.

(3) Alkalmazzuk (2)-t az X és $V \setminus Y$ halmazokra, figyelembe

véve, hogy $c(V \setminus Y) = c(Y)$, $c(X \cap (V \setminus Y)) = c(X \setminus Y)$ ill. $c(X \cup (V \setminus Y)) = c(Y \setminus X)$



□.

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

(1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn,

ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és

(2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.

(3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

A Lemma (2) részének neve **szubmoduláris egyenlőtlenség**.

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

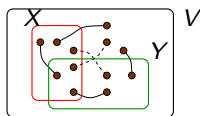
A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

Köv: Ha $X, Y \subset V(G)$ a G keresztező minimális vágásai, akkor

- (1) $X \cap Y, X \cup Y, X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ szintén minvágások,
- (2) $E(X, Y) = \emptyset = E(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$
- (3) $|E(X \cap Y, X \setminus Y)| = |E(X \cap Y, Y \setminus X)| =$
 $|E(X \setminus Y, V \setminus (X \cup Y))| = |E(Y \setminus X, V \setminus (X \cup Y))|$



A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

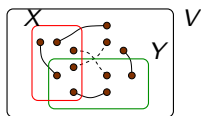
- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\check{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

Köv: Ha $X, Y \subset V(G)$ a G keresztező minimális vágásai, akkor

- (1) $X \cap Y, X \cup Y, X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ szintén minvágások,

- (2) $E(X, Y) = \emptyset = E(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$

- (3) $|E(X \cap Y, X \setminus Y)| = |E(X \cap Y, Y \setminus X)| =$
 $|E(X \setminus Y, V \setminus (X \cup Y))| = |E(Y \setminus X, V \setminus (X \cup Y))|$



Biz: (1-2): A Lemma (1) része miatt $2\lambda_c(G) = c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\check{c}(E(X, Y)) \geq 2\lambda_c(G)$, így végig egyenlőség áll. Ezért $X \cap Y$ és $X \cup Y$ minvágások és $E(X, Y) = \emptyset$. Ugyanezt X -re és $V \setminus Y$ -ra alkalmazva adódik, hogy $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ egyaránt minvágások, és $E(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y)) = \emptyset$.

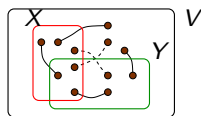
A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

Köv: Ha $X, Y \subset V(G)$ a G keresztező minimális vágásai, akkor

- (1) $X \cap Y, X \cup Y, X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ szintén minvágások,
- (2) $E(X, Y) = \emptyset = E(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$
- (3) $|E(X \cap Y, X \setminus Y)| = |E(X \cap Y, Y \setminus X)| =$
 $|E(X \setminus Y, V \setminus (X \cup Y))| = |E(Y \setminus X, V \setminus (X \cup Y))|$



Biz:

A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

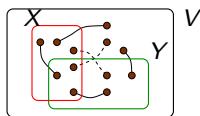
- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

Köv: Ha $X, Y \subset V(G)$ a G keresztező minimális vágásai, akkor

- (1) $X \cap Y, X \cup Y, X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ szintén minvágások,

(2) $E(X, Y) = \emptyset = E(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$

(3) $|E(X \cap Y, X \setminus Y)| = |E(X \cap Y, Y \setminus X)| =$
 $|E(X \setminus Y, V \setminus (X \cup Y))| = |E(Y \setminus X, V \setminus (X \cup Y))|$



Biz: (3) Köv (1,2)-ből látszik. Pl. $c(X \cap Y) = c(X)$ miatt
 $\tilde{c}(E(X \cap Y, X \setminus Y)) = \tilde{c}(E(X \setminus Y, V \setminus (X \cup Y)))$. □

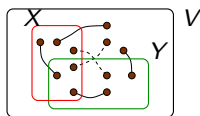
A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

Köv: Ha $X, Y \subset V(G)$ a G keresztező minimális vágásai, akkor

- (1) $X \cap Y, X \cup Y, X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ szintén minvágások,
- (2) $E(X, Y) = \emptyset = E(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$
- (3) $|E(X \cap Y, X \setminus Y)| = |E(X \cap Y, Y \setminus X)| =$
 $|E(X \setminus Y, V \setminus (X \cup Y))| = |E(Y \setminus X, V \setminus (X \cup Y))|$



A szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma: Legyen $G = (V, E)$ véges gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ nemneg. kapacitásfv. Ekkor tetsz. keresztező $X, Y \subset V$ halmazokra

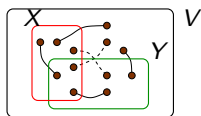
- (1) $c(X) + c(Y) = c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + 2\tilde{c}(E(X, Y))$ áll fenn, ahol $E(X, Y)$ az $(X \setminus Y)$ és $(Y \setminus X)$ között vezető élek halmaza, és
- (2) $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ ill.
- (3) $c(X) + c(Y) \geq c(X \setminus Y) + c(Y \setminus X)$ teljesül.

Köv: Ha $X, Y \subset V(G)$ a G keresztező minimális vágásai, akkor

- (1) $X \cap Y, X \cup Y, X \setminus Y$ és $Y \setminus X$ szintén minvágások,

(2) $E(X, Y) = \emptyset = E(X \cap Y, V \setminus (X \cup Y))$

(3) $|E(X \cap Y, X \setminus Y)| = |E(X \cap Y, Y \setminus X)| =$
 $|E(X \setminus Y, V \setminus (X \cup Y))| = |E(Y \setminus X, V \setminus (X \cup Y))|$



Köv: Ha $u, v \in V$ és X_1 és X_2 olyan minimális uv -vágások, amire $u \in X_1 \cap X_2$, akkor $X_1 \cap X_2$ és $X_1 \cup X_2$ is u -t tartalmazó minimális uv -vágások. Ezért az u -t tartalmazó minimális uv -vágások között létezik legbővebb és legszűkebb. □

A Gomory–Hu-fa

Cél: $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitások esetén G bármely (u, v) csúcspárjára szeretnénk hatékonyan tárolni az uv -vágások kapacitásainak a minimumát. Sőt: szeretnénk minden csúcspárra egy konkrét minvágást is reprezentálni.

A Gomory–Hu-fa

Cél: $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitások esetén G bármely (u, v) csúcspárjára szeretnénk hatékonyan tárolni az uv -vágások kapacitásainak a minimumát. Sőt: szeretnénk minden csúcspárra egy konkrét minvágást is reprezentálni.

Def: $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitások esetén F a G **Gomory–Hu-fája**, ha (1) F fa és $V(F) = V$, illetve (2) $\forall x, y \in V(G)$ csúcsra F valamelyik uv élére $F - uv$ komponensei G egy minimális xy -vágását határozzák meg.

Megf: Ha az F Gomory–Hu-fa minden élet felcímkézzük az adott él által reprezentált minimális vágás kapacitásával, akkor G bármely u, v csúcspárjára egy minimális uv -vágást határoz meg az F -beli uv -út legkisebb címkéjű élének elhagyásával kapott két komponens bármelyike.

A Gomory–Hu-fa

Def: $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitások esetén F a G **Gomory–Hu-fája**, ha

- (1) F fa és $V(F) = V$, illetve
- (2) $\forall x, y \in V(G)$ csúcsra F valamelyik uv élére $F - uv$ komponensei G egy minimális xy -vágását határozzák meg.

Megf: Ha az F Gomory–Hu-fa minden élit felcímkézzük az adott él által reprezentált minimális vágás kapacitásával, akkor G bármely u, v csúcspárjára egy minimális uv -vágást határoz meg az F -beli uv -út legkisebb címkéjű élének elhagyásával kapott két komponens bármelyike.

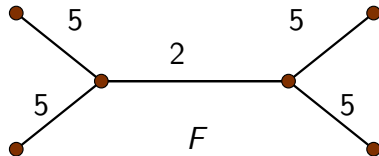
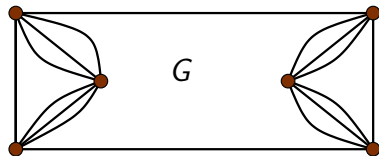
A Gomory–Hu-fa

Def: $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitások esetén F a G **Gomory–Hu-fája**, ha

- (1) F fa és $V(F) = V$, illetve
- (2) $\forall x, y \in V(G)$ csúcsra F valamelyik uv élére $F - uv$ komponensei G egy minimális xy -vágását határozzák meg.

Megf: Ha az F Gomory–Hu-fa minden élet felcímkézzük az adott él által reprezentált minimális vágás kapacitásával, akkor G bármely u, v csúcspárjára egy minimális uv -vágást határoz meg az F -beli uv -út legkisebb címkéjű élének elhagyásával kapott két komponens bármelyike.

Példa: $c \equiv 1$



A Gomory–Hu-fa

Def: $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitások esetén F a G **Gomory–Hu-fája**, ha

- (1) F fa és $V(F) = V$, illetve
- (2) $\forall x, y \in V(G)$ csúcsra F valamelyik uv élére $F - uv$ komponensei G egy minimális xy -vágását határozzák meg.

Megf: Ha az F Gomory–Hu-fa minden élit felcímkézzük az adott él által reprezentált minimális vágás kapacitásával, akkor G bármely u, v csúcspárjára egy minimális uv -vágást határoz meg az F -beli uv -út legkisebb címkéjű élének elhagyásával kapott két komponens bármelyike.

A Gomory–Hu-fa

Def: $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitások esetén F a G **Gomory–Hu-fája**, ha

- (1) F fa és $V(F) = V$, illetve
- (2) $\forall x, y \in V(G)$ csúcsra F valamelyik uv élére $F - uv$ komponensei G egy minimális xy -vágását határozzák meg.

Megf: Ha az F Gomory–Hu-fa minden élet felcímkezzük az adott él által reprezentált minimális vágás kapacitásával, akkor G bármely u, v csúcspárjára egy minimális uv -vágást határoz meg az F -beli uv -út legkisebb címkéjű élének elhagyásával kapott két komponens bármelyike.

Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

A Gomory–Hu-fa

Def: $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ kapacitások esetén F a G **Gomory–Hu-fája**, ha

- (1) F fa és $V(F) = V$, illetve
- (2) $\forall x, y \in V(G)$ csúcsra F valamelyik uv élére $F - uv$ komponensei G egy minimális xy -vágását határozzák meg.

Megf: Ha az F Gomory–Hu-fa minden élet felcímkezzük az adott él által reprezentált minimális vágás kapacitásával, akkor G bármely u, v csúcspárjára egy minimális uv -vágást határoz meg az F -beli uv -út legkisebb címkéjű élének elhagyásával kapott két komponens bármelyike.

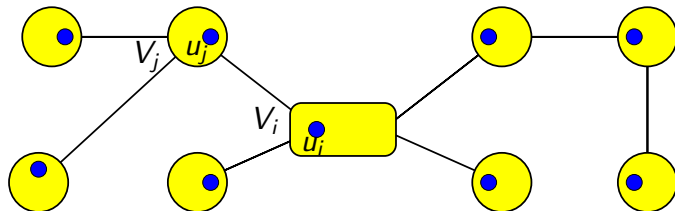
Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Megj: A Gomory–Hu-fa létezése azzal ekvivalens, hogy található $V(G)$ -n egy F fa azzal a tulajdonsággal, hogy ha G minden e élet helyettesítjük az e végpontjait összekötő F -beli úttal és ezen út eleinek $c(e)$ kapacitást adunk, akkor az így kapott élkapacitásokkal ellátott fagráf bármely két csúcsa között ugyanannyi marad a lokális éösszefüggőség, mint amennyi G -ben volt.

A Gomory–Hu-fa előállítása

Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

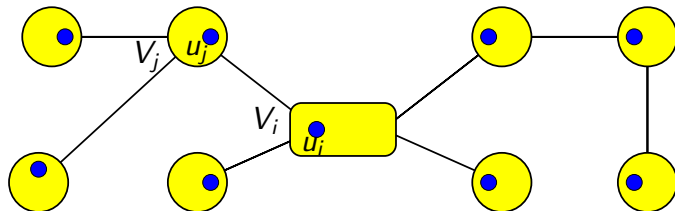
A Gomory–Hu-fa előállítás



Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Tfh $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. k szerinti indukcióval igazoljuk, hogy V -nek van olyan $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ partíciója, amire $u_i \in V_i \forall i$ és egy F_k fa a $V(F) = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ ponthalmazon, ami minden $1 \leq i < j \leq k$ esetén reprezentál egy minimális $u_i u_j$ -vágást és emellett F_k annak a gráfnak a GH fája, amit G -ből az egyes V_i részek egy csúcsba történő összeolvasztásával kapunk. A $k = 1$ eset trív. Tfh $(k - 1)$ -re már megtaláltuk F_{k-1} -et.

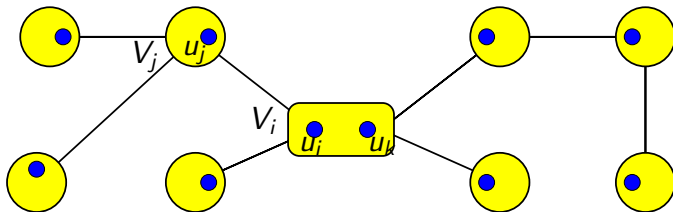
A Gomory–Hu-fa előállítása



Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz:

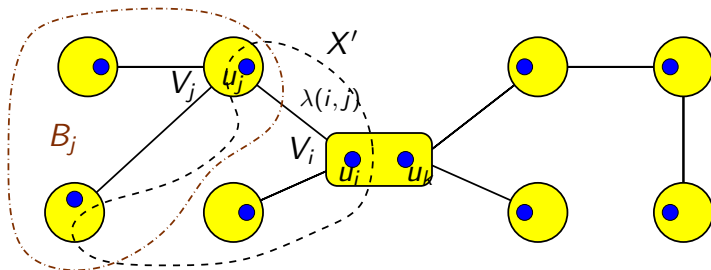
A Gomory–Hu-fa előállítás



Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Tfh $u_k \in V_i$.

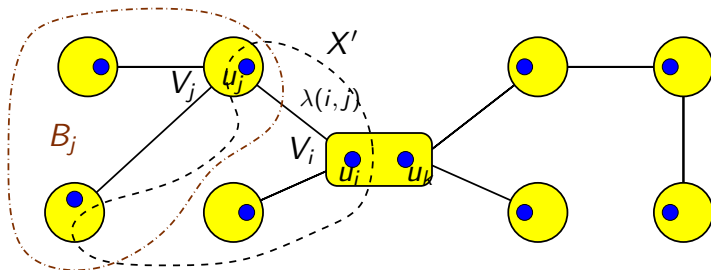
A Gomory–Hu-fa előállítás



Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Tfh $u_k \in V_i$. Legyen X' a legbővebb minimális $u_i u_k$ -vágás, amire $u_i \in X'$. Tfh X' keresztezi F_{k-1} egy B_j ágát.

A Gomory–Hu-fa előállítás



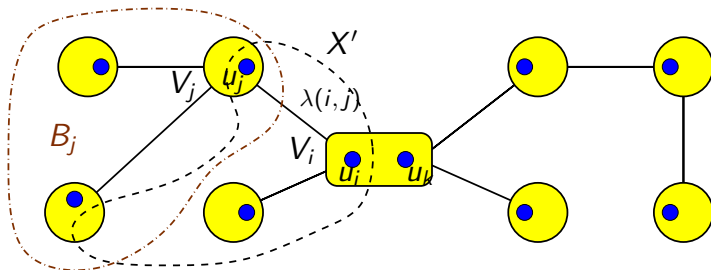
Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Tfh $u_k \in V_i$. Legyen X' a legbővebb minimális $u_i u_k$ -vágás, amire $u_j \in X'$. Tfh X' keresztezi F_{k-1} egy B_j ágát.

Ha $u_j \in X'$, akkor $B_j \cup X'$ $u_i u_k$ -vágás, míg $B_j \cap X'$ $u_i u_j$ -vágás.

Ezért a szubmodularitás miatt $\lambda(i, k) + \lambda(i, j) = c(X') + c(B_j) \geq c(X' \cap B_j) + c(X' \cup B_j) \geq \lambda(i, k) + \lambda(i, j)$, így $X' \cup B_j$ is minimális $u_i u_k$ -vágás, tehát X' legbővebb volta miatt $B_j \subseteq X'$. Feltehetjük tehát, hogy ha X' keresztezi az F_{k-1} fa valamelyik U_i -ből induló B_j ágát, akkor $u_j \notin X'$.

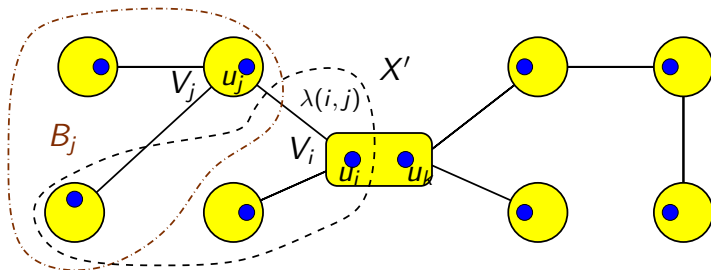
A Gomory–Hu-fa előállítás



Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Tfh $u_k \in V_i$. Legyen X' a legbővebb minimális $u_i u_k$ -vágás, amire $u_i \in X'$. Tfh X' keresztezi F_{k-1} egy B_j ágát.

A Gomory–Hu-fa előállítás

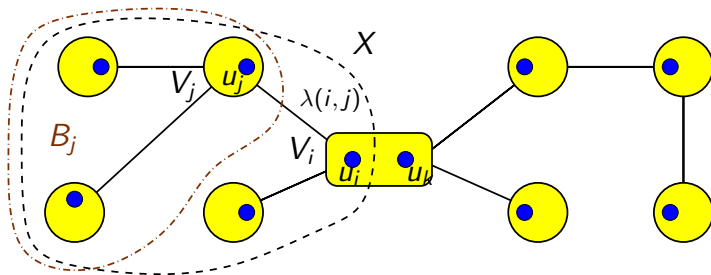


Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Tfh $u_k \in V_i$. Legyen X' a legbővebb minimális $u_i u_k$ -vágás, amire $u_i \in X'$. Tfh X' keresztezi F_{k-1} egy B_j ágát.

Ha pedig $u_j \notin X'$, akkor $X' \setminus B_j$ $u_i u_k$ -vágás, $B_j \setminus X'$ pedig $u_i u_j$ -vágás. Ezért $\lambda(i, k) + \lambda(i, j) = c(X') + c(B_j) \geq c(X' \setminus B_j) + c(B_j \setminus X') \geq \lambda(i, k) + \lambda(i, j)$, így $X_j := X' \setminus B_j$ is minimális $u_i u_k$ -vágás.

A Gomory–Hu-fa előállítás



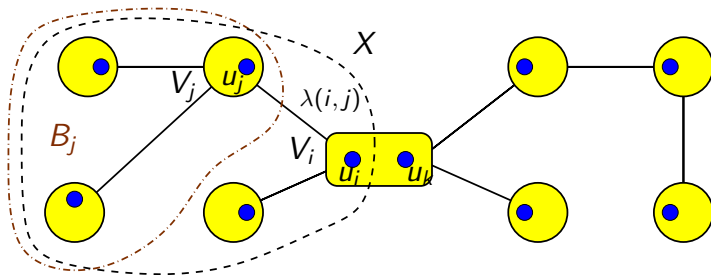
Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Tfh $u_k \in V_i$. Legyen X' a legbővebb minimális $u_i u_k$ -vágás, amire $u_i \in X'$. Tfh X' keresztezi F_{k-1} egy B_j ágát.

Ha pedig $u_j \notin X'$, akkor $X' \setminus B_j$ $u_i u_k$ -vágás, $B_j \setminus X'$ pedig $u_i u_j$ -vágás. Ezért $\lambda(i, k) + \lambda(i, j) =$

$= c(X') + c(B_j) \geq c(X' \setminus B_j) + c(B_j \setminus X') \geq \lambda(i, k) + \lambda(i, j)$, így $X_j := X' \setminus B_j$ is minimális $u_i u_k$ -vágás. Legyen X az ilyen X_j -k metszete. A szubmodularitás miatt X olyan minimális $u_i u_k$ -vágás, ami nem keresztezi F_{k-1} egyetlen B_j ágát sem.

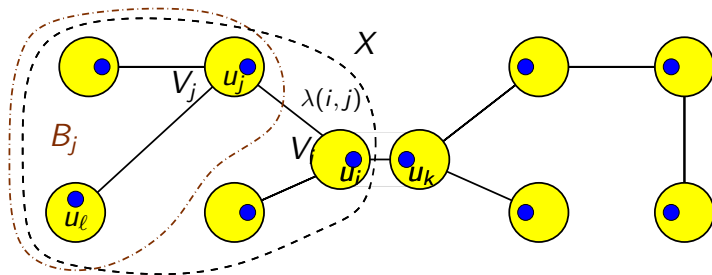
A Gomory–Hu-fa előállítás



Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Ez az X vágás határozza meg az F_k fát. Azt kell igazolni, hogy F_k minden $1 \leq \ell < k$ -ra reprezentál minimális $u_k u_\ell$ -vágást.

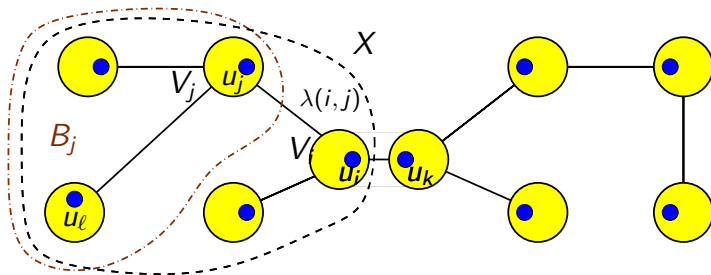
A Gomory–Hu-fa előállítás



Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Ez az X vágás határozza meg az F_k fát. Azt kell igazolni, hogy F_k minden $1 \leq \ell < k$ -ra reprezentál minimális $u_k u_\ell$ -vágást.

A Gomory–Hu-fa előállítás

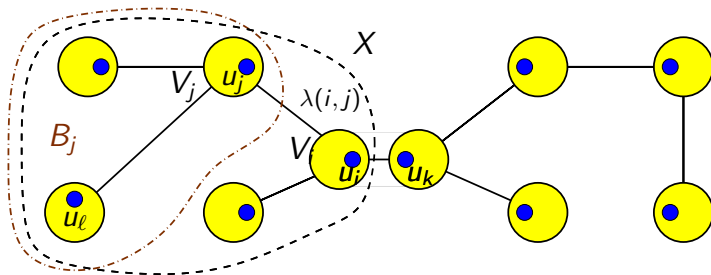


Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Ez az X vágás határozza meg az F_k fát. Azt kell igazolni, hogy F_k minden $1 \leq \ell < k$ -ra reprezentál minimális $u_k u_\ell$ -vágást.

1. Tfh $\lambda(k, \ell) \geq \lambda(i, \ell)$. Mivel F_k reprezentál egy $\lambda(i, \ell)$ kapacitású $u_k u_\ell$ -vágást, ezért $\lambda(k, \ell) \leq \lambda(i, \ell)$. A feltevés miatt $\lambda(k, \ell) = \lambda(i, \ell)$, így az F_k által reprezentált fenti vágás megfelel.

A Gomory–Hu-fa előállítása



Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Biz: Ez az X vágás határozza meg az F_k fát. Azt kell igazolni, hogy F_k minden $1 \leq \ell < k$ -ra reprezentál minimális $u_k u_\ell$ -vágást.

2. Ha pedig $\lambda(k, \ell) < \lambda(i, \ell)$, akkor egyetlen minimális $u_k u_\ell$ -vágás sem szeparálja u_i -t és u_ℓ -et. Ezért minden minimális $u_k u_\ell$ -vágás szeparálja u_k -t és u_i -t, tehát $\lambda(k, \ell) \geq \lambda(i, k)$. Mivel X szeparálja u_k -t és u_ℓ -et, ezért $\lambda(k, \ell) = \lambda(i, k)$, és X megfelel. $\square$

A Gomory–Hu-fa előállítása

Tétel: Bármely $G = (V, E)$ gráfnak tetszőleges $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élkapacitások mellett létezik Gomory–Hu-fája.

Köv: Ha G n csúcsú gráf akkor

- (1) G Gomory–Hu-fája megkonstruálható $n - 1$ olyan folyamalgoritmussal, amit legfeljebb n csúcsú hálózaton futtatunk.
- (2) G csúcsai között legfeljebb $(n - 1)$ -féle $\lambda(u, v)$ érték lép fel.
- (3) Megadható G -nek $n - 1$ vágása úgy, hogy bármely (u, v) csúcspárjához megadjunk egy minimális uv -vágást.

Biz: (1) Sorra megkonstruáljuk az $F_1, F_2, \dots, F_n$ fákat. Ha az F_{k-1} fában $u_k \in V_i$, akkor G -ben egybeolvasztjuk az F_{k-1} fa V_i csúcsáról lelógó ágaknak megfelelő részhalmazokat. Az így kapott gráfban (pl. folyamalgoritmussal) keresünk minimális $u_i u_k$ -vágást, és ennek segítségével állítjuk elő F_{k-1} -ből az F_k fát. Az eljárás végén kapott F_n fa pedig épp a G gráf Gomory–Hu-fája lesz.

(2-3) A Gomory–Hu-fa éleihez tartozó vágások megfelelnek.

További lehetőségek

Megj: Csábító gondolat, hogy a GH-fa konstrukciójában a folyamalgoritmust valami olcsóbb eljárással helyettesítsük. Igéretesnek tűnik a maxvissza sorrend, aholis az utolsó két csúcsról szóló lemma miatt azonnal kapunk egy minimális $v_{n-1}v_n$ -vágást, amiből $u_1 = v_n$ és $u_2 = v_{n-1}$ választással megtaláljuk F_2 -t. Egyetlen folyamalgoritmust ugyan megspórolunk így, de egyáltalán nem világos, hogyan lehetne a Nagamochi–Ibaraki-algoritmusra alapozva folytatni ezt a konstrukciót. Úgy tűnik, jelenleg nem ismert $n - 1$ folyamalgoritmus kiszámításánál lényegesen gyorsabb módszer a GH-fa megtalálására.

Megj: A GH-fa megad a vizsgált gráf minden egyes (u, v) csúcspárjára egy minimális uv -vágást. Ha azonban minket csak a G minimális vágásai érdekelnek, de abból az összes (pl. azért, mert G élösszefüggőségét a lehető legkevesebb él behúzásával meg akarjuk növelni, ezért minden minimális vágást fednie kell egy új élnek), akkor ezekre is létezik jól kezelhető reprezentáció, mégpedig az ú.n. kaktuszgráf.

Mit tanultunk ma?

- ▶ Szubmoduláris és rokon egyenlőtlenségek
- ▶ Keresztező minimális vágások zártsága metszetre, unióra és különbségre
- ▶ Lokális élösszefüggőséget tanúsító Gomory–Hu-fa létezése
- ▶ Gomory–Hu-fa konstrukciója $n - 1$ folyamalgoritmussal

Itt a vége, fuss el véle!