

Gráfok és algoritmusok

Baranyai tétele

2025. május 20.

Bevezetés

A mai órán Baranyai Zsolt 1975-ben igazolt tételét mutatjuk be, amivel Sylvester egy 1850 óta nyitva álló sejtését oldotta meg. A sejtés bizonyos tulajdonságú partíciók létezéséről szólt, és a megoldás újszerűsége két dologban rejlik. Egyrészt ott szakít a korábbi próbálkozásokkal, hogy nem egy jól leírható „szabályos” megoldás keresését célozza, másrészt pedig egy kerekítési lemmával talál a folytonos relaxációból egész megoldást.

Három évvel a tétele bizonyítása után Baranyai Zsolt 29 évesen, autóbaleset következtében életét veszttette.

Érdekes adalék:

<https://ematlap.hu/interju-portre-2019-6/879-emlekezes-baranyai-zsoltra>

Bevezetés

Bevezetés

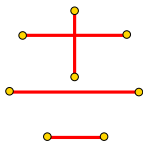
A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

Bevezetés

A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

Az fordulók meghatározása nem más, mint a K_{2n} teljes gráf élszínezése $2n - 1$ színnel: az azonos színű élek minden színre egy-egy teljes párosítást adnak, és ez írja le, hogy mi történik az adott

fordulóban. A mellékelt ábra K_{2n} egy teljes párosítását ábrázolja, ennek elforgatottjai írják le egy bajnokság fordulóit.

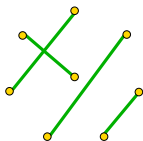


Bevezetés

A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

Az fordulók meghatározása nem más, mint a K_{2n} teljes gráf élszínezése $2n - 1$ színnel: az azonos színű élek minden színre egy-egy teljes párosítást adnak, és ez írja le, hogy mi történik az adott

fordulóban. A mellékelt ábra K_{2n} egy teljes párosítását ábrázolja, ennek elforgatottjai írják le egy bajnokság fordulóit.

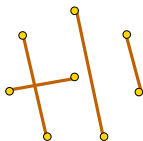


Bevezetés

A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

Az fordulók meghatározása nem más, mint a K_{2n} teljes gráf élszínezése $2n - 1$ színnel: az azonos színű élek minden színre egy-egy teljes párosítást adnak, és ez írja le, hogy mi történik az adott

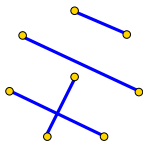
fordulóban. A mellékelt ábra K_{2n} egy teljes párosítását ábrázolja, ennek elforgatottjai írják le egy bajnokság fordulóit.



Bevezetés

A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

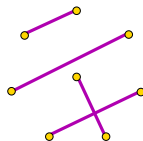
Az fordulók meghatározása nem más, mint a K_{2n} teljes gráf élszínezése $2n - 1$ színnel: az azonos színű élek minden színre egy-egy teljes párosítást adnak, és ez írja le, hogy mi történik az adott fordulóban. A mellékelt ábra K_{2n} egy teljes párosítását ábrázolja, ennek elforgatottjai írják le egy bajnokság fordulóit.



Bevezetés

A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

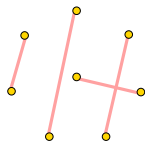
Az fordulók meghatározása nem más, mint a K_{2n} teljes gráf élszínezése $2n - 1$ színnel: az azonos színű élek minden színre egy-egy teljes párosítást adnak, és ez írja le, hogy mi történik az adott fordulóban. A mellékelt ábra K_{2n} egy teljes párosítását ábrázolja, ennek elforgatottjai írják le egy bajnokság fordulóit.



Bevezetés

A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

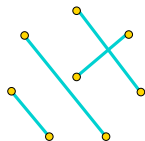
Az fordulók meghatározása nem más, mint a K_{2n} teljes gráf élszínezése $2n - 1$ színnel: az azonos színű élek minden színre egy-egy teljes párosítást adnak, és ez írja le, hogy mi történik az adott fordulóban. A mellékelt ábra K_{2n} egy teljes párosítását ábrázolja, ennek elforgatottjai írják le egy bajnokság fordulóit.



Bevezetés

A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

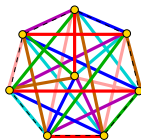
Az fordulók meghatározása nem más, mint a K_{2n} teljes gráf élszínezése $2n - 1$ színnel: az azonos színű élek minden színre egy-egy teljes párosítást adnak, és ez írja le, hogy mi történik az adott fordulóban. A mellékelt ábra K_{2n} egy teljes párosítását ábrázolja, ennek elforgatottjai írják le egy bajnokság fordulóit.



Bevezetés

A vizsgált probléma a körmérkőzéses bajnokságok szervezésével illusztrálható. Jól ismert, hogy ha $2n$ csapattal kell lejátsszatnunk egy körmérkőzéses bajnokság $\binom{2n}{2}$ mérkőzését, akkor a bajnokság megszervezhető $2n - 1$ fordulóban úgy, hogy minden csapat minden másik csapattal pontosan egyszer játszik, és minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzés résztvevője.

Az fordulók meghatározása nem más, mint a K_{2n} teljes gráf élszínezése $2n - 1$ színnel: az azonos színű élek minden színre egy-egy teljes párosítást adnak, és ez írja le, hogy mi történik az adott



fordulóban. A mellékelt ábra K_{2n} egy teljes párosítását ábrázolja, ennek elforgatottjai írják le egy bajnokság fordulóit.

Hogy kellene n csapatnak körmérkőzéses bajnokságot szervezni egy olyan sportban, ahol minden meccsen k csapat játszik? Összesen $\binom{n}{k}$ mérkőzés van, és ha $k \mid n$ akkor egy fordulóban épp $\frac{n}{k}$ meccset játszanak. Ha lehetséges a fordulókba szervezés, akkor a fordulók számára $\binom{n}{k} / \left(\frac{n}{k}\right) = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n} = \binom{n-1}{k-1}$ adódik.

Baranyai tétele

Baranyai tétele: Legyen $1 \leq k \mid n$, $m := n/k$ és

$M := \binom{n}{k} / \frac{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. Ekkor az $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k -méretű részhalmazait lehetséges m -esével csoportosítani (ezáltal M csoportot képezve) úgy, hogy minden egyes m méretű csoport az $[n]$ halmaz egy-egy partíciója legyen. (Partíció: az alaphalmaz előállítása diszjunkt részhalmazok uniójaként.)

Avagy: n csapat között a furcsasport körmérkőzéses bajnokságának k -csapatos meccsei fordulóba szervezhetők.

Baranyai tétele

Baranyai tétele: Legyen $1 \leq k \mid n$, $m := n/k$ és $M := \binom{n}{k} / \frac{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. Ekkor az $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k -méretű részhalmazait lehetséges m -esével csoportosítani (ezáltal M csoportot képezve) úgy, hogy minden egyes m méretű csoport az $[n]$ halmaz egy-egy partíciója legyen. (Partíció: az alaphalmaz előállítása diszjunkt részhalmazok uniójaként.)

Avagy: n csapat között a furcsasport körmérkőzéses bajnokságának k -csapatos meccsei fordulóba szervezhetők.

Tudományosan ezt úgy is szokták mondani, hogy a $k \mid n$ esetén az n csúcsú k -uniform teljes hipergráf 1-faktorokra partícionálható.

De úgy is megfogalmazhatjuk ugyanezt, hogy a fenti hipergráf élkromatikus száma megegyezik a maximális fokszámával, ami egyébként csakúgy, mint a gráfok esetében, triviális alsó korlát.

Baranyai tétele

Baranyai tétele: Legyen $1 \leq k \mid n$, $m := n/k$ és

$M := \binom{n}{k} / \frac{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. Ekkor az $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k -méretű részhalmazait lehetséges m -esével csoportosítani (ezáltal M csoportot képezve) úgy, hogy minden egyes m méretű csoport az $[n]$ halmaz egy-egy partíciója legyen. (Partíció: az alaphalmaz előállítása diszjunkt részhalmazok uniójaként.)

Avagy: n csapat között a furcsasport körmérkőzéses bajnokságának k -csapatos meccsei fordulóba szervezhetők.

Baranyai tétele

Baranyai tétele: Legyen $1 \leq k \mid n$, $m := n/k$ és $M := \binom{n}{k} / \frac{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. Ekkor az $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k -méretű részhalmazait lehetséges m -esével csoportosítani (ezáltal M csoportot képezve) úgy, hogy minden egyes m méretű csoport az $[n]$ halmaz egy-egy partíciója legyen. (Partíció: az alaphalmaz előállítása diszjunkt részhalmazok uniójaként.)
Avagy: n csapat között a furcsasport körmérkőzéses bajnokságának k -csapatos meccsei fordulókbá szervezhetők.

Ennél (formálisan) általánosabb tételt igazolunk.

Baranyai lemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható az $[\ell]$ halmaznak M db m -tagú partíciója úgy, hogy tetszőleges $S \subseteq [\ell]$ halmaz pontosan $\binom{n-\ell}{k-|S|}$ partícióban szerepeljen.

Baranyai tétele

Baranyai tétele: Legyen $1 \leq k \mid n$, $m := n/k$ és $M := \binom{n}{k} / \frac{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. Ekkor az $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k -méretű részhalmazait lehetséges m -esével csoportosítani (ezáltal M csoportot képezve) úgy, hogy minden egyes m méretű csoport az $[n]$ halmaz egy-egy partíciója legyen. (Partíció: az alaphalmaz előállítására diszjunkt részhalmazok uniójaként.)
Avagy: n csapat között a furcsasport körmérkőzéses bajnokságának k -csapatos meccsei fordulóba szervezhetők.

Ennél (formálisan) általánosabb tételt igazolunk.

Baranyai lemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható az $[\ell]$ halmaznak M db m -tagú partíciója úgy, hogy tetszőleges $S \subseteq [\ell]$ halmaz pontosan $\binom{n-\ell}{k-|S|}$ partícióban szerepeljen.

Az $\ell = n$ eset épp Baranyai tétele. Az $\ell < n$ eset pedig tekinthető a bajnokság egy olyan, részleges ütemtervének, amiben csak az első ℓ csapatra van megadva, hogy az egyes fordulók melyik meccsein milyen kombinációban játszanak egymással.

A Baranyai lemma

Baranyai lemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható az $[\ell]$ halmaznak M db m -tagú partíciója úgy, hogy tetszőleges $S \subseteq [\ell]$ halmaz pontosan $\binom{n-\ell}{k-|S|}$ partíciónak legyen tagja.

A Baranyai lemma

Baranyai lemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható az $[\ell]$ halmaznak M db m -tagú partíciója úgy, hogy tetszőleges $S \subseteq [\ell]$ halmaz pontosan $\binom{n-\ell}{k-|S|}$ partíciónak legyen tagja.

A lemmában szereplő partíciók karakterisztikus vektorait mátrixba rendezve az alábbi átfoglalmazást kapjuk.

Mátrixlemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható egy $M \times 2^\ell$ méretű $A(\ell)$ mátrix az alábbi tulajdonságokkal.

(Az A mátrix i -dik sora A_i , j -dik oszlopa A^j , (i, j) eleme A^j_i .)

1. $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg.
2. $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek.
3. $A(\ell)$ sorai az $[\ell]$ m -tagú partícióinak karakterisztikus vektorai.
4. $A(\ell)$ -ben az S oszlop összege $\sum_{i=1}^M A(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|} \quad \forall S \subseteq [\ell]$.

Megj: A fenti lemmában egy olyan m -tagú partíció esetén, amiben az $\emptyset$ multiplicitása s , a hozzá tartozó „karakterisztikus” vektor megfelelő koordinátája s .

A Baranyai lemma

Baranyai lemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható az $[\ell]$ halmaznak M db m -tagú partíciója úgy, hogy tetszőleges $S \subseteq [\ell]$ halmaz pontosan $\binom{n-\ell}{k-|S|}$ partíciónak legyen tagja.

A lemmában szereplő partíciók karakterisztikus vektorait mátrixba rendezve az alábbi átfogalmazást kapjuk.

Mátrixlemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható egy $M \times 2^\ell$ méretű $A(\ell)$ mátrix az alábbi tulajdonságokkal.

(Az A mátrix i -dik sora A_i , j -dik oszlopa A^j , (i, j) eleme A^j_i .)

1. $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg.
2. $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek.
3. $A(\ell)$ sorai az $[\ell]$ m -tagú partícióinak karakterisztikus vektorai.
4. $A(\ell)$ -ben az S oszlop összege $\sum_{i=1}^M A(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|} \quad \forall S \subseteq [\ell]$.

A Baranyai lemma

Baranyai lemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható az $[\ell]$ halmaznak M db m -tagú partíciója úgy, hogy tetszőleges $S \subseteq [\ell]$ halmaz pontosan $\binom{n-\ell}{k-|S|}$ partíciónak legyen tagja.

A lemmában szereplő partíciók karakterisztikus vektorait mátrixba rendezve az alábbi átfoglalmazást kapjuk.

Mátrixlemma: Minden $0 \leq \ell \leq n$ esetén megadható egy $M \times 2^\ell$ méretű $A(\ell)$ mátrix az alábbi tulajdonságokkal.

(Az A mátrix i -dik sora A_i , j -dik oszlopa A^j , (i, j) eleme A^j_i .)

1. $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg.
2. $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek.
3. $A(\ell)$ sorai az $[\ell]$ m -tagú partícióinak karakterisztikus vektorai.
4. $A(\ell)$ -ben az S oszlop összege $\sum_{i=1}^M A(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|} \quad \forall S \subseteq [\ell]$.

A mátrixlemmát ℓ szerinti teljes indukcióval igazoljuk. $\ell = 0$ esetén az $\emptyset$ -hoz tartozó egyetlen oszlop minden eleme m . Az indukciós lépésben $A(\ell - 1)$ segítségével állítjuk a fenti tulajdonságokkal rendelkező $A(\ell)$ mátrixot.

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

- $A'(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.
- $A'(\ell)$ minden eleme 0 vagy 1.
- $A'(\ell)$ minden sora pontosan 1 db 1-est tartalmaz.
- $A'(\ell)$ S -hez tartozó oszlopa $\binom{n-\ell}{k-|S|-1}$ db 1-est tartalmaz.

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

- $A'(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.
- $A'(\ell)$ minden eleme 0 vagy 1.
- $A'(\ell)$ minden sora pontosan 1 db 1-est tartalmaz.
- $A'(\ell)$ S -hez tartozó oszlopa $\binom{n-\ell}{k-|S|-1}$ db 1-est tartalmaz.

Az $A'(\ell)$ mátrix helyett egy $A^*(\ell)$ mátrixot konstruálunk az egészértékűségi feltétel relaxálásával.

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

a'. $A^*(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.

b'. $A^*(\ell)$ minden eleme 0 és 1 közé esik.

c'. $A^*(\ell)$ minden sorösszege 1.

d'. $A^*(\ell)$ S -oszlopösszege $\sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|-1} \quad \forall S \subseteq [\ell - 1]$.

Az $A'(\ell)$ mátrix helyett egy $A^*(\ell)$ mátrixot konstruálunk az egészértékűségi feltétel relaxálásával.

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

a'. $A^*(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.

b'. $A^*(\ell)$ minden eleme 0 és 1 közé esik.

c'. $A^*(\ell)$ minden sorösszege 1.

d'. $A^*(\ell)$ S -oszlopösszege $\sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|-1} \forall S \subseteq [\ell - 1]$.

Az $A'(\ell)$ mátrix helyett egy $A^*(\ell)$ mátrixot konstruálunk az egészértékűségi feltétel relaxálásával.

Legyen $A^*(\ell)^S = \frac{k-|S|}{n-\ell+1} \cdot A(\ell - 1)^S$, azaz minden fordulóban az ℓ csapat vegyen részt a meccseken kiadó $n - \ell + 1$ hely mindegyikén $\frac{1}{n-\ell+1}$ multiplicitással. Ellenőrizzük a'-.d'. teljesülését.

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

a'. $A^*(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.

b'. $A^*(\ell)$ minden eleme 0 és 1 közé esik.

c'. $A^*(\ell)$ minden sorösszege 1.

d'. $A^*(\ell)$ S -oszlopösszege $\sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|-1} \forall S \subseteq [\ell - 1]$.

Az $A'(\ell)$ mátrix helyett egy $A^*(\ell)$ mátrixot konstruálunk az egészértékűségi feltétel relaxálásával.

Legyen $A^*(\ell)^S = \frac{k-|S|}{n-\ell+1} \cdot A(\ell - 1)^S$, azaz minden fordulóban az ℓ csapat vegyen részt a meccseken kiadó $n - \ell + 1$ hely mindegyikén $\frac{1}{n-\ell+1}$ multiplicitással. Ellenőrizzük a'.-d'. teljesülését.

a'.: triviális.

b'.: Tetsz. $|S| > k$ esetén 4. miatt $A(\ell - 1)^S = 0$, továbbá $|S| = k$ -ra $A^*(\ell)^S = 0$ a definícióból. Ha pedig $|S| < k$, akkor $0 \leq k - |S| \leq n + 1 - \ell$ miatt $0 \leq A^*(\ell)^S \leq A(\ell - 1)^S$.

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

a'. $A^*(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.

b'. $A^*(\ell)$ minden eleme 0 és 1 közé esik.

c'. $A^*(\ell)$ minden sorösszege 1.

d'. $A^*(\ell)$ S -oszlopösszege $\sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|-1} \forall S \subseteq [\ell - 1]$.

Az $A'(\ell)$ mátrix helyett egy $A^*(\ell)$ mátrixot konstruálunk az egészértékűségi feltétel relaxálásával.

Legyen $A^*(\ell)^S = \frac{k-|S|}{n-\ell+1} \cdot A(\ell - 1)^S$, azaz minden fordulóban az ℓ csapat vegyen részt a meccseken kiadó $n - \ell + 1$ hely mindegyikén $\frac{1}{n-\ell+1}$ multiplicitással. Ellenőrizzük a'-.d'. teljesülését.

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

a'. $A^*(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.

b'. $A^*(\ell)$ minden eleme 0 és 1 közé esik.

c'. $A^*(\ell)$ minden sorösszege 1.

d'. $A^*(\ell)$ S -oszlopösszege $\sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|-1} \forall S \subseteq [\ell - 1]$.

Az $A'(\ell)$ mátrix helyett egy $A^*(\ell)$ mátrixot konstruálunk az egészértékűségi feltétel relaxálásával.

Legyen $A^*(\ell)^S = \frac{k-|S|}{n-\ell+1} \cdot A(\ell - 1)^S$, azaz minden fordulóban az ℓ csapat vegyen részt a meccseken kiadó $n - \ell + 1$ hely mindegyikén $\frac{1}{n-\ell+1}$ multiplicitással. Ellenőrizzük a'.-d'. teljesülését.

$$\begin{aligned} c'.: \sum_S A^*(\ell)_i^S &= \sum_S \frac{k-|S|}{n-\ell+1} A(\ell - 1)_i^S = \\ &= \frac{1}{n-\ell+1} \sum_S (k - |S|) \cdot (A(\ell - 1)_i^S) = \frac{n-\ell+1}{n-\ell+1} = 1 \text{ u.i. az utolsó} \\ &\text{összeg az } i\text{-dik forduló meccsein kiadó helyeket számolja meg.} \\ &(\text{Az is kell ehhez, hogy } |S| > k \text{ esetén } A(\ell - 1)_i^S = 0.) \end{aligned}$$

Az $A'(\ell)$ segédmátrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

a'. $A^*(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.

b'. $A^*(\ell)$ minden eleme 0 és 1 közé esik.

c'. $A^*(\ell)$ minden sorösszege 1.

d'. $A^*(\ell)$ S -oszlopösszege $\sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|-1} \forall S \subseteq [\ell - 1]$.

Az $A'(\ell)$ mátrix helyett egy $A^*(\ell)$ mátrixot konstruálunk az egészértékűségi feltétel relaxálásával.

Legyen $A^*(\ell)^S = \frac{k-|S|}{n-\ell+1} \cdot A(\ell - 1)^S$, azaz minden fordulóban az ℓ csapat vegyen részt a meccseken kiadó $n - \ell + 1$ hely mindegyikén $\frac{1}{n-\ell+1}$ multiplicitással. Ellenőrizzük a'-.d'. teljesülését.

Az $A'(\ell)$ segédmatrix

Az $A(\ell)$ mátrix meghatározásához az ℓ -dik csapat számára kell játéktervet készíteni. Ezt egy olyan $A'(\ell)$ mátrix írja le, amire az alábbiak teljesülnek.

a'. $A^*(\ell)$ oszlopai $[\ell - 1]$ részhalmazainak felelnek meg.

b'. $A^*(\ell)$ minden eleme 0 és 1 közé esik.

c'. $A^*(\ell)$ minden sorösszege 1.

d'. $A^*(\ell)$ S -oszlopösszege $\sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|-1} \forall S \subseteq [\ell - 1]$.

Az $A'(\ell)$ mátrix helyett egy $A^*(\ell)$ mátrixot konstruálunk az egészértékűségi feltétel relaxálásával.

Legyen $A^*(\ell)^S = \frac{k-|S|}{n-\ell+1} \cdot A(\ell - 1)^S$, azaz minden fordulóban az ℓ csapat vegyen részt a meccseken kiadó $n - \ell + 1$ hely mindegyikén $\frac{1}{n-\ell+1}$ multiplicitással. Ellenőrizzük a'.-d'. teljesülését.

d'.: Az ℓ -et tartalmazó oszlophoz tartozó összeg az indukció miatt $\sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \frac{k-|S|}{n-\ell+1} \cdot \sum_{i=1}^M A(\ell - 1)_i^S = \frac{k-|S|}{n-\ell+1} \cdot \binom{n-\ell+1}{k-|S|} = \binom{n-\ell}{k-|S|-1}$.

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak.

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak.

Biz: Egyetlen sorban vagy oszlopban sem lehet pontosan egy tört szám. Ezért amíg van tört a mátrixban, található a törtelemeken vízszintes és függőleges lépésekből álló zárt út. Ennek a mentén minden második elemet növelve, minden másodikat csökkentve egyetlen sor- vagy oszlopösszeg sem változik, de elérhető, hogy legalább egy tört eltűnjön, miközben egyetlen mátrixelem sem ugrik át egész számot. Ilyen változtatások sorozatával előbb-utóbb minden tört eltűnik A' -ből. □

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak.

Biz: Egyetlen sorban vagy oszlopban sem lehet pontosan egy tört szám. Ezért amíg van tört a mátrixban, található a törtelemeken vízszintes és függőleges lépésekből álló zárt út. Ennek a mentén minden második elemet növelve, minden másodikat csökkentve egyetlen sor- vagy oszlopösszeg sem változik, de elérhető, hogy legalább egy tört eltűnjön, miközben egyetlen mátrixelem sem ugrik át egész számot. Ilyen változtatások sorozatával előbb-utóbb minden tört eltűnik A' -ből. □

Megj: A táblázat-kerekítési lemmánál sokkal több is igaz, ahogy ezt az EgÉr lemmával rokon kerekítési lemma kapcsán korábban láttuk. Ha a sor- és oszlopösszegek nem egészek, akkor úgy is lehet kerekíteni, hogy ezek is kerekedjenek. Sőt: az is elérhető, hogy mindezen túl az első i sor és az első i oszlop összege is kerekedjék minden i -re. A Baranyai-tételhez viszont elég a legegyszerűbb alak.

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.
1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. $\checkmark$

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.

1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. $\checkmark$

2.: $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek, hisz $A'(\ell)$ elemei egészek, és $0 \leq A'(\ell)_i^S \leq A(\ell - 1)_i^S$.

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.

1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. $\checkmark$

2.: $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek. $\checkmark$

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.

- 1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. ✓
- 2.: $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek. ✓
- 3.: $A(\ell)$ sorai $[\ell]$ partícióiának karakterisztikus vektorai, u.i. $A(\ell)$ úgy kapható $A(\ell - 1)$, hogy minden sorában az $[\ell - 1]$ partíciójában szereplő egyik S halmazt $S \cup \{\ell\}$ -lel helyettesítjük.

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.

- 1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. ✓
- 2.: $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek. ✓
- 3.: $A(\ell)$ sorai $[\ell]$ partícióiának karakterisztikus vektorai. ✓

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.

- 1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. $\checkmark$
- 2.: $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek. $\checkmark$
- 3.: $A(\ell)$ sorai $[\ell]$ partícióiának karakterisztikus vektorai. $\checkmark$
- 4.: $A(\ell)$ oszlopösszegei stimmelnek, u.i. $S \subseteq [\ell - 1]$ -re

$$\sum_{i=1}^M A(\ell)_i^{S \cup \{\ell\}} = \sum_{i=1}^M A'(\ell)_i^S = \sum_{i=1}^M A^*(\ell)_i^S = \binom{n-\ell}{k-|S|-1} \text{ ill.}$$

$$\text{ebből } \sum_{i=1}^M A(\ell)_i^S = \sum_{i=1}^M A(\ell - 1)_i^S - \sum_{i=1}^M A'(\ell)_i^{S \cup \{\ell\}} = \binom{n-\ell+1}{k-|S|} - \binom{n-\ell}{k-|S|-1} = \binom{n-\ell}{k-|S|} \text{ adódik az } \ell\text{-et tartalmazó ill. } \ell\text{-et nem tartalmazó oszlopösszegekre.}$$

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.

- 1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. ✓
- 2.: $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek. ✓
- 3.: $A(\ell)$ sorai $[\ell]$ partícióiának karakterisztikus vektorai. ✓
- 4.: $A(\ell)$ oszlopösszegei stimmelnek. ✓

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.

- 1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. ✓
- 2.: $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek. ✓
- 3.: $A(\ell)$ sorai $[\ell]$ partícióiának karakterisztikus vektorai. ✓
- 4.: $A(\ell)$ oszlopösszegei stimmelnek. ✓

Az indukciós lépéssel igazoltuk a Mátrixlemma mellett Baranyai lemmáját is. A Baranyai-tétel innen közvetlenül adódik. $\square$

Mátrixok kerekítése, Baranyai tételének bizonyítása

Táblázat-kerekítési lemma: Ha az A^* mátrix sor- és oszlopösszegei egészek, akkor A^* elemei kerekíthetők úgy, hogy a kapott A' mátrix sor- ill. oszlopösszegek ne változzanak. $\square$

Az $A^*(\ell)$ -ből a táblázat-kerekítési lemma szerint kapott $A'(\ell)$ mátrix teljesíti az a-d. feltételeket. Legyen $A(\ell)^{S \cup \{\ell\}} = A'(\ell)^S$ és $A(\ell)^S = A(\ell - 1)^S - A'(\ell)^S$. Ellenőrizzük az 1-4. feltételeket.

- 1.: $A(\ell)$ oszlopai $[\ell]$ részhalmazainak felelnek meg. $\checkmark$
- 2.: $A(\ell)$ elemei nemnegatív egészek. $\checkmark$
- 3.: $A(\ell)$ sorai $[\ell]$ partícióiának karakterisztikus vektorai. $\checkmark$
- 4.: $A(\ell)$ oszlopösszegei stimmelnek. $\checkmark$

Az indukciós lépéssel igazoltuk a Mátrixlemma mellett Baranyai lemmáját is. A Baranyai-tétel innen közvetlenül adódik. $\square$

Megj: Baranyai tétele felfogható úgy is, mint a $\chi' = \Delta$ igazolását k -uniform teljes hipergráfokra. Érdekes, hogy páros gráfokra folyamok kerekítéséből kaphatjuk meg a hasonló eredményt, míg Galvin tételében (mely szerint $\chi'_\ell = \Delta$) a színezés szintén iterációk után kapható, bár ott nem kerekíteni kell.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- ▶ Körmérkőzések bajnokságok és teljes gráfok élszínezésének kapcsolata

Mit tanultunk ma?

- ▶ Körmérkőzőses bajnokságok és teljes gráfok élszínezésének kapcsolata
- ▶ Baranyai tétele: körmérkőzőses bajnokság szervezése egy furcsasportban

Mit tanultunk ma?

- ▶ Körmérkőzéses bajnokságok és teljes gráfok élszínezésének kapcsolata
- ▶ Baranyai tétele: körmérkőzéses bajnokság szervezése egy furcsasportban
- ▶ Baranyai-lemma: a körmérkőzéses bajnokság néhány csapat szempontjából táblázatos formában

Mit tanultunk ma?

- ▶ Körmérkőzéses bajnokságok és teljes gráfok élszínezésének kapcsolata
- ▶ Baranyai tétele: körmérkőzéses bajnokság szervezése egy furcsasportban
- ▶ Baranyai-lemma: a körmérkőzéses bajnokság néhány csapat szempontjából táblázatos formában
- ▶ Részleges ütemterv készíthető a körmérkőzéses bajnokságra a mátrixreprezentáció és a táblázatkerekítési lemma segítségével.

Mit tanultunk ma?

- ▶ Körmérkőzéses bajnokságok és teljes gráfok élszínezésének kapcsolata
- ▶ Baranyai tétele: körmérkőzéses bajnokság szervezése egy furcsasportban
- ▶ Baranyai-lemma: a körmérkőzéses bajnokság néhány csapat szempontjából táblázatos formában
- ▶ Részleges ütemterv készíthető a körmérkőzéses bajnokságra a mátrixreprezentáció és a táblázatkerekítési lemma segítségével.

Vakáció!