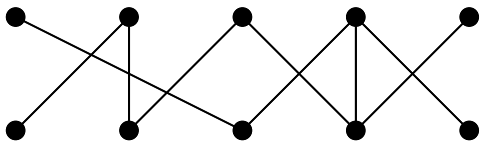
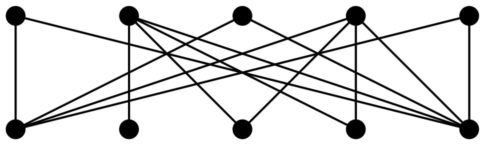
SzA IX. gyakorlat, 2015. november 5.
Páros gráfok, görög betűk

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban az alternáló utas módszerrel!



2. Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!



3. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!
4. Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a következő gráfokban, és adjunk hozzájuk megfelelő csúcs- vagy élhalmazokat!

5. Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!
6. A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!
7. Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n - 1$, akkor $G = K_n$!
8. Igazoljuk, hogy $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül tetszőleges hurokélmentes G gráfra. (Továbbá $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$ is. :P)
9. A G gráf egyszerű, összefüggő, 100 csúcsa van és van benne 25 élű párosítás. Igazoljuk, hogy $\omega(\overline{G}) \leq 75$.
10. Adott egy G páros gráf (A és B színosztályokkal) és G minden v csúcsához egy $b(v)$ pozitív egész szám. Az a cél, hogy a lehető legtöbb élét kiválasszuk G-nek úgy, hogy minden v csúcs legfeljebb $b(v)$ kiválasztott élnek legyen végpontja. Adjunk hatékony algoritmust ennek a problémának a megoldására. (A feladatban körülírt élhalmazt b-párosításnak is szokás hívni.)

---

11. G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?
12. **[ZH 2010. október 15.]** Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?
13. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!
14. **[ppZH 2010. ősz]** Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.

15. A $V = \{2, 3, \ldots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$ ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek)! Van-e G-ben teljes párosítás?
16. **[ppZH 2011. december 14.]** Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_i v_j : \frac{i+j}{i-j} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.
17. **[ZH 2009. október 19.]** Legyen G az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az $\alpha(G), \tau(G), \rho(G), \nu(G)$ értékeket!
18. **[ppZH 2012. december 12.]** Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az egyszerű G páros gráf egy színosztálya, és tegyük fel, hogy $d(a_i) > i$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Igazoljuk, hogy G-ben van A-t fedő párosítás.
19. Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!
20. **[ZH 2012. november 22.]** Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7$ a G egyszerű gráf csúcsai, és pontosan akkor fusson v_i és v_j között él, ha $i^2 - 1$-nek és $j^2 - 1$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, számítsuk ki a G-ben található független élek ill. független csúcsok maximális számát ($\nu(G)$-t és $\alpha(G)$-t), valamint a G-t lefogó pontok ill. élek minimális számát ($\tau(G)$-t és $\rho(G)$-t).
21. A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!
22. Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!
23. **[pZH 2010. ősz]** Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.
24. Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdaságiés egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?
25. **[pZH 2009. november 17.]** Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltéltel.
26. Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amire teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?
27. Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)
28. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.
29. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$!

Hasznos tudnivalók

- $\alpha(G)$: független csúcsok maximális száma G-ben
- $\nu(G)$: független élek maximális száma G-ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma G-ben (csak akkor értelmezett, ha nincs izolált pont)
- $\tau(G)$: lefogó csúcsok minimális száma G-ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$, $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai: $\alpha(G) + \tau(G) = n$, valamint ha nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra! $\nu(G) = \tau(G)$; $\alpha(G) = \rho(G)$, ha nincs izolált pont