

1. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:
 C_4 , C_5 , alábbi 2 gráf



$\chi(C_4) = 2$, páros hosszú kör kromatikus száma mindig 2. $\chi(C_5) = 3$, mert páratlan kör. A bal oldali gráfban $\omega(G) = 4$, tehát $\chi(G) \geq 4$, viszont egy 4 színnel színezést tudunk is mutatni. A jobb oldali gráfban $\chi(G) = 4$, mert bár az alsó korlát 3, a külső csúcsoknak különböző színűeknek kell lenniük, és ha ezeket kiszínezzük, és tovább folytatjuk az egyértelműen kiszínezhető csúcsok színezését, akkor a középső csúcsnak muszáj bevezetni egy negyedik színt (vagyis egy olyan feltételezés esetén, hogy 3 színnel színezhető lenne, ellentmondásra jutunk).

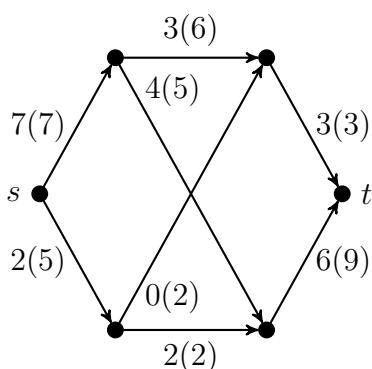
2. Van-e olyan G gráf, amiben nincs 4 csúcsú teljes részgráf, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?

Mi az hogy, nagyon is! Például a fenti jobb oldali.

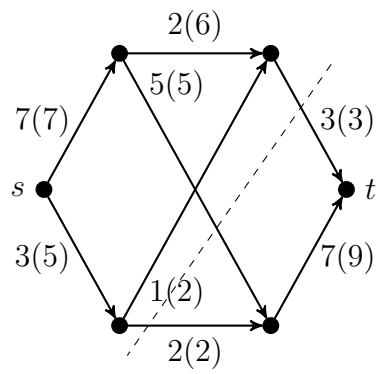
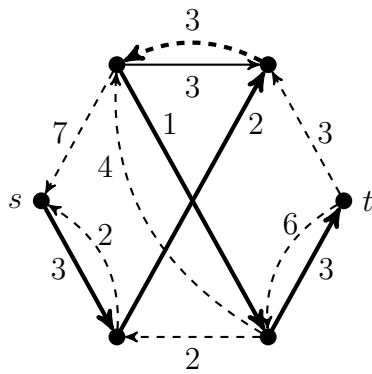
3. Igazoljuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, ahol $\Delta(G)$ jelöli a maximális fokszámot a G gráfban.

Konstruktív bizonyítást adunk: adunk egy algoritmust, ami garantáltan kiszínez bármely gráfot ennyi színnel. Az algoritmus legyen a mohó színezés: sorban vesszük a csúcsokat, és mindegyiknek azt a legkisebb sorszámú színt adjuk, amilyen szomszédja még nincs. Mivel bármely csúcsnak legfeljebb $\Delta(G)$ szomszédja lehet, így amikor egy csúcsot színezzük, biztos, hogy legfeljebb ennyi szín foglalt, vagyis $\Delta(G) + 1$ szín közül biztos jut neki. (Részletesebben, pontosabban lásd a jegyzetben.)

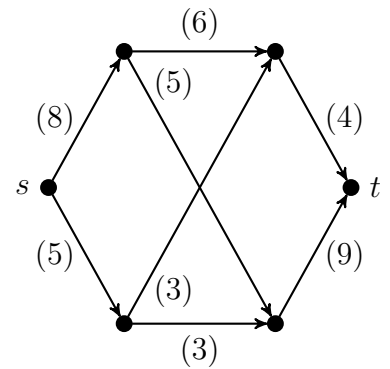
4. Növeljük a bal oldali gráfban a megadott folyamatot, ha ez lehetséges, vagy mutassuk meg, hogy ez már egy maximális folyamat!



Bal oldalt szerepel a javítógráf, szaggatottal jelölve a visszafelé tartó élek, valamint vastagítva egy javítóút, ahol a minimális érték 1. A javítást elvégezve 1 értékkel a jobb oldalon szerepel az eredményül előálló folyamat.

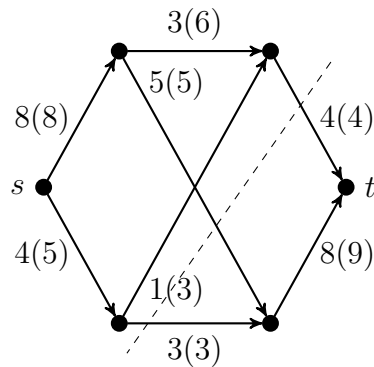


Egyébként a szaggattottal jelölt vágás értéke 10, valamint a folyamunk is 10 értékű, tehát a vágás minimális, a folyam pedig maximális, így hiába is próbálnánk tovább javítani.



5. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a fenti jobb oldali gráfban!

Alább látható egy 12 értékű folyam és egy szintén 12 értékű vágás. Így láthatjuk, hogy van egy maximális folyamunk és egy minimális vágásunk. Az eredményt megkaphattuk a javítóutas algoritmussal, de akár ránézésre is.

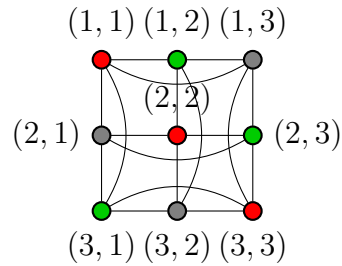


6. G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G -ben, ha egymásból bátyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?

Az egy sorhoz (vagy oszlophoz) tartozó csúcsok K_8 -at alkotnak, tehát biztos, hogy $\chi(G) \geq 8$. 8 szín viszont elég is, az alábbi egy jó színezés:

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
				⋮			
2	3	4	5	6	7	8	1

7. [ppZH 2012. december 12.] Legyenek a G_n egyszerű gráf csúcsai az (i, j) számpárok, ahol i és j 1 és n közötti egészek. A G_n gráf (i, j) és (k, l) egymástól különböző csúcsai pontosan akkor szomszédosak, ha $i = k$ vagy $j = l$. Rajzoljuk le G_3 egy áttekinthető diagramját, valamint határozzuk meg G_3 kromatikus számát, $\chi(G_3)$ -t.

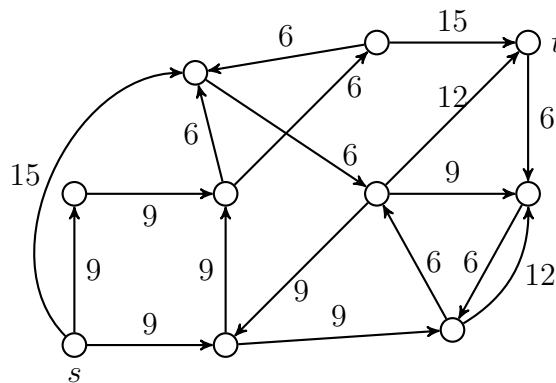


A mellékelt ábra G_3 egy áttekinthetőnek szánt diagramját mutatja. (4 pont)

Mivel az $(1, 1)$, $(1, 2)$ és $(1, 3)$ csúcsok páronként szomszédosak, ezért $\chi(G_3) \geq \omega(G_3) \geq 3$. (3 pont)

Az ábrán látható G_3 egy 3-színezése, tehát $\chi(G) = 3$. (3 pont)

8. [ZH 2008. október 10.] Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam nagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)



A maximális folyam nagyság megegyezik a minimális st -vágás értékével. (3 pont)

Mivel minden él kapacitása 3-mal osztható, (2 pont)

ezért a minimális vágáskapacitás is 3 többszöröse (2 pont)

tehát a maximális folyam nagyság is 3-mal osztható. (2 pont)

A 17-et 3-mal osztva 2 maradékot kapunk, ezért a maximális folyam nagyság nem lehet 17. (1 pont)

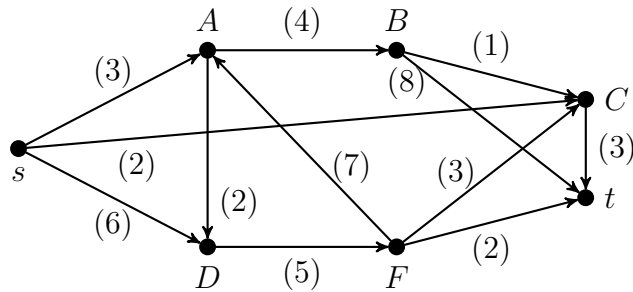
Meg lehet oldani persze a feladatot a maximális folyam meghatározásával is.

A javító utak módszerével meghatározunk egy maximális folyamat, ami itt 18 értékű lesz. (8 pont)

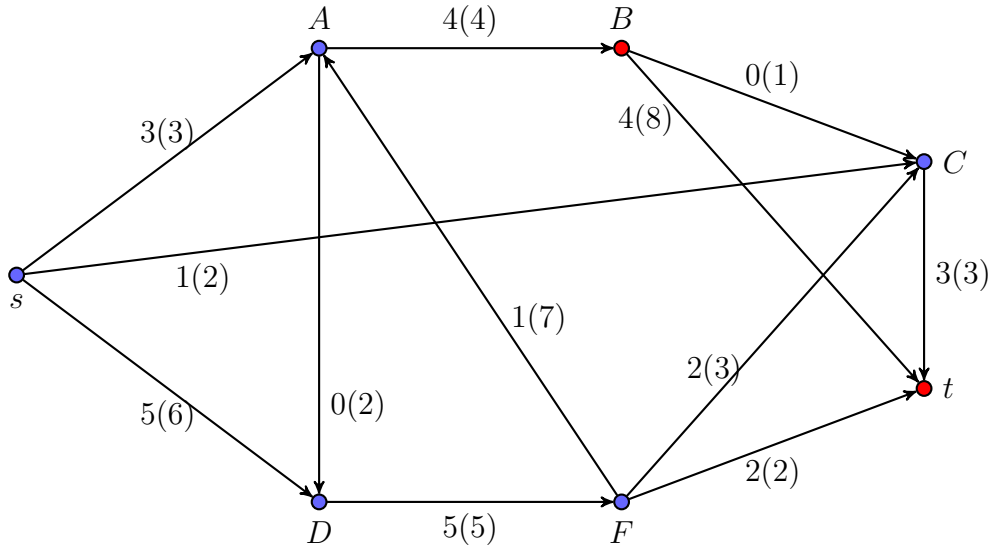
Tehát a maximális folyam nagyság 18, vagyis semmiképp sem 17. (2 pont)

(Nem rajzolom le.)

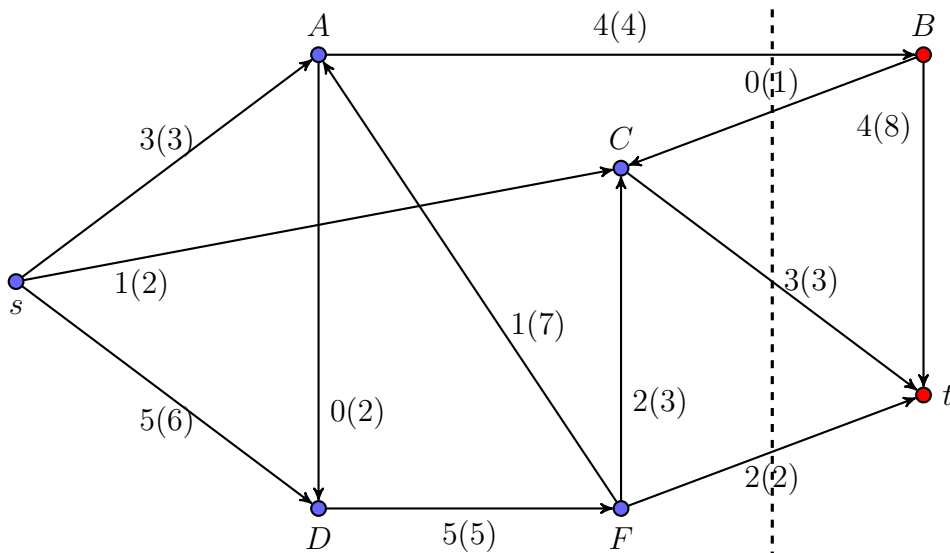
9. Határozzuk meg egy maximális folyamat és egy minimális vágást a következő hálózatban!



A lépéseket nem írom le, a végeredmény:



A vágást nehéz lenne szépen berajzolni, kékesen és pirosan szerepelnek a két osztályba tartozó csúcsok. Átrajzolva, és a vágást jelölve:



10. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G -nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!

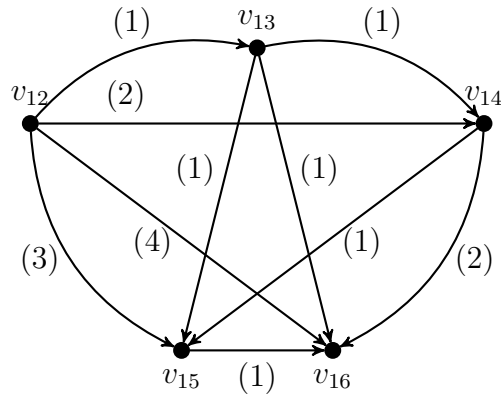
Tfh nincs ilyen piros pont. Ekkor egy tetszőleges piros pontot mindig át tudunk színezni olyan színűre, ami hiányzik a szomszédai közül. Ha ezt az összes piros pontra megcsináljuk, akkor szintén egy jó színezést kapunk, viszont így $\chi(G) = k - 1$ lenne, ami ellentmondás.

11. [pZH 2011. december 1.] A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a $v_i v_j$ él kapacitása $c(v_i v_j) = (i, j)$, más éle G -nek nincs. Ha a $v_{15} v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12} -ből v_{16} -ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15} v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyam nagyság elérhető?

Megjegyzés: (i, j) -vel jelöljük i és j számok legnagyobb közös osztóját.

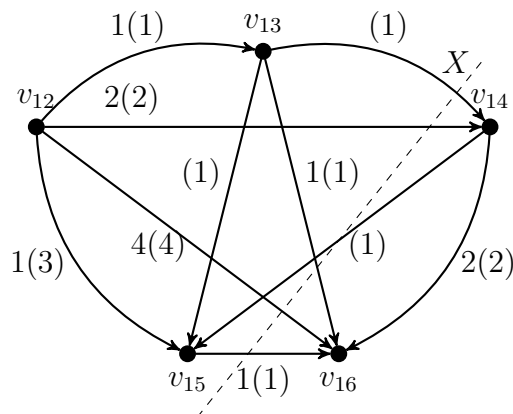
Az ábrán látható az adott hálózat diagramja.

(2 pont)



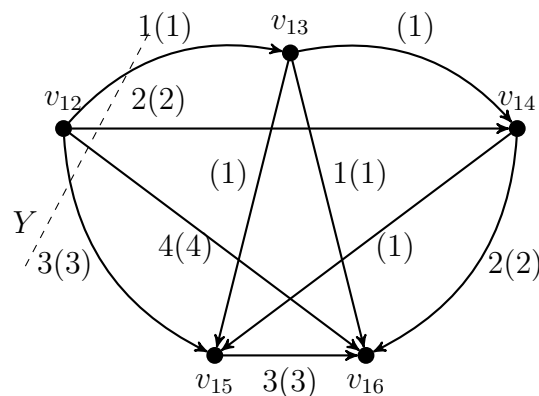
Ezen a tanult javító utas algoritmussal kerestünk maximális nagyságú folyamat, mégpedig a (v_{12}, v_{16}) , (v_{12}, v_{14}, v_{16}) , (v_{12}, v_{13}, v_{16}) és (v_{12}, v_{15}, v_{16}) utakon rendre 4-et, 2-t, ill. 1-et, 1-et javítva, az eredményül előálló értékek az ábrán láthatók. A kapott 8 nagyságú folyam maximalitását az ábrán szaggatottal jelölt 8 kapacitású X vágás bizonyítja.

(4 pont)



Ha most a $v_{15} v_{16}$ él kapacitását kellően nagyra választjuk, akkor még tovább növelhető a folyam nagysága (v_{12}, v_{15}, v_{16}) úton. Így kapjuk a következő ábrán szereplő, 10 nagyságú folyamat, aminél nagyobbat nem kaphatunk, hiszen az ott jelölt Y vágás kapacitása 10, és ez a vágás nem tartalmazza a $v_{15} v_{16}$ élet.

(2 pont)



Ahhoz, hogy az X vágás kapacitása legalább 10 legyen, a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását legalább 3-ra kell növelni, tehát ekkora növelés feltétlenül szükséges a 10 nagyságú folyamhoz. Láttuk, hogy ez elég is, tehát 3 a legkisebb olyan kapacitás, amire ez elérhető. (2 pont)

12. **Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G -ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.**

$\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$: a két kromatikus szám közül a nagyobbal nyilván az egyik és másik komponenst is ki tudjuk színezni. Kevesebb nyilván nem elég, hiszen az egyik komponenst már önmagában sem lehet ennél kevesebbrel kiszínezni, tehát az egészet sem.

$\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$: ennyivel ki lehet színezni, a H -t kiszínezzük $\chi(H)$ színnel, majd K -t $\chi(K)$, az előzőektől különböző színnel. Kevesebb nem lehet, hiszen a két komponensben nem lehet ugyanolyan szín az összeköttetések miatt, a komponenseket pedig már önmagukban sem tudjuk kevesebb színnel színezni.

13. **Egy kisváros úthálózata csupa egyirányú utcából áll. A polgármester minden hétköznap reggel autóval megy otthonról a városházára. A fejébe veszi, hogy úgy szeretné ezt megtenni, hogy minden utcán egy hét alatt legfeljebb egyszer menjen végig (a hazafelé utak nem számítanak). Adjunk meg olyan algoritmust, mellyel a kisváros térképe alapján eldönthető, hogy megtehető-e ez!**

Feleltessünk meg egy hálózatot a kisváros térképének! Az élek az utcák megfelelő irányítással, a kezdőpont (s) a ház, a végpont (t) a polgármesteri hivatal. Legyen minden él kapacitása 1! Ekkor pontosan akkor létezik 5 éldiszjunkt út, ha létezik s és t között egy legalább 5 értékű folyam. Ezt a javító utas algoritmussal könnyű ellenőrizni.

14. **Mutassuk meg, hogy ha G véges, egyszerű gráf, akkor $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$, ahol $\alpha(G) = k$, ha G -ben van k db páronként nem szomszédos csúcs, de $k + 1$ már nincs.**

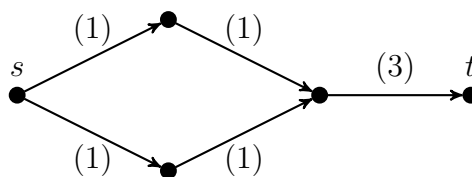
Mivel egy helyes színezésben az azonos színhez tartozó csúcsok biztos független halmazt alkotnak, minden színosztály mérete legfeljebb $\alpha(G)$. Azaz

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |\{v | v \in V(G), v \text{ színe } i\}| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G) \cdot \alpha(G).$$

(Első egyenlőség magyarázata azoknak, akiknek ez a felírás esetleg nem tetszik: mivel a színosztályok a csúcsok egy partícióját adják, ha összeadjuk a színosztályokban szereplő csúcsok számát az összes színosztályra, pont a gráf csúcsainak számát kapjuk meg. Azaz a szummában az egyes színosztályok mérete szerepel.)

15. **Igaz-e, hogy ha egy hálózatban minden él kapacitása páratlan szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páratlan szám? És ha páros?**

Az első nem igaz, ellenpélda alatt. A második igaz, mert ha minden élnek páros a kapacitása, és kezdetben egy 0 értékű folyamból indulunk, akkor a javítóutas algoritmus minden lépésben páros számmal változtatja a folyamértéket, így minden élen mindig páros érték fog szerepelni, értelemszerűen a maximális esetben is.



16. **Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását csökkentve a maximális folyam nagyság csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a**

kapacitását növelve, a maximális folyam nagyság növekszik?

Első eset: feltételezve, hogy a max folyam nagyobb nullánál, igaz. Ekkor ugyanis egy minimális vágásban egy tetszőleges él kapacitását csökkentve kisebb lesz a vágás értéke, tehát a maximális folyam értéke is csökken. Második eset: nem igaz, ellenpélda: olyan gráf, ahol legalább két különböző minimális vágás is van.

17. **Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k . Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!**

A színeknek definiáljuk egy sorrendjét! Ez lehet pl. a színek indexe. Vegyük a gráf k -színnel való színezését, majd irányítsuk úgy az éleket, hogy mindig a kisebb sorszámúból a nagyobb sorszámúval színezett csúcsba mutasson! Egyenlőség a jó színezés miatt nem állhat elő. Ebben az esetben minden, a gráfban lévő irányított útban a csúcsok színei folyamatosan növekednek, így mivel legfeljebb k színt használhatunk, egy irányított út is legfeljebb k hosszú lehet.

18. **[ppZH 2012. december 12.] Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban f maximális nagyságú folyam és C a G egy olyan irányított köre, amelynek minden élén f pozitív értéket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy C egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű) st -vágáshoz.**

Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy a C kör uv éle egy minimális kapacitású st -vágáshoz tartozik. Legyen X az az s - t tartalmazó, t -t elkerülő ponthalmaz, ami ezt a minimális kapacitású vágást meghatározza. (2 pont)

Az órán tanultak miatt ha f maximális nagyságú folyam, akkor minden X -ből $V(G) \setminus X$ -be futó e él telített, azaz $f(e) = c(e)$ teljesül, míg egyetlen $V(G) \setminus X$ -ből X -be futó e' él sem hordoz folyamat, azaz $f(e') = 0$. (4 pont)

Mivel a C irányított körnek van a vágáshoz tartozó, azaz X -ből $V(G) \setminus X$ -be futó éle, ezért kell lennie a C körnek olyan g élének is, ami $V(G) \setminus X$ -ből X -be fut. (2 pont)

A feladtbeli feltevés szerint a g élen is pozitív nagyságú folyam folyik, ez pedig ellentmond f maximalitásának. (1 pont)

A kapott ellentmondás igazolja a feladatban megfogalmazott állítást. (1 pont)

19. **Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.**

Biztos, hogy bármely két színosztály között kell futnia élnek, hiszen ha lenne két színosztály, amelyek pontjai között nem megy él, akkor az egyiket átszínezhethetnénk a másik színére, vagyis kevesebb színnel is színezhethetnénk a gráfot.

(A képlet pedig pont ezt számolja: ha bármely két színosztályt kiválasztjuk, akkor legalább egy éllel ők biztosan hozzájárulnak az élszámhoz.)

20. **Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!**

Tudjuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Egy reguláris gráfban minden fokszám megegyezik, vagyis $n\Delta = 2e$, amiből $\Delta = 2e/n$, ezt pedig behelyettesítve megkapjuk a kívánt állítást.

21. **Igazoljuk, hogy ha a (G, s, t, c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy megengedett folyam, akkor létezik olyan megengedett f' egész folyam is, amelyre $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre.**

Konstruktívan bizonyítunk, azaz adunk egy algoritmust, ami pont egy nekünk megfelelő folyamat csinál véges lépésben. Ha tekintjük azt a részgráfot, amiben csak a tört folyamértékkel rendelkező élek vannak, akkor ebben kizárólag $s - t$ utak és (az élek irányításától eltekintve) körök lehetnek. Akár egy $s - t$ úton, akár egy körön (Kirchhoff szabállyal) megtehetjük, hogy egy egész számhoz legközelebbi folyamértékkel rendelkező élen levő folyamértéket úgy megváltoztatunk, hogy egész legyen a folyamérték. Ezt a változtatást megfelelően átvezetjük az adott út vagy kör összes többi élére is, miközben egyik folyamérték sem fog kilépni a korlátai közül (ezért választottuk azt, amelyik a legközelebb volt egy egész számhoz).

A fenti módszer egy alkalmazásával csökkenteni tudjuk legalább eggyel a tört értékkel rendelkező élek számát, vagyis legfeljebb $|E|$ lépésben el tudjuk érni a kívánt folyamatot.

(Példa: $s \xrightarrow{2.3} \xrightarrow{10.1} \xrightarrow{0.5} t$ esetén -0.1 lesz a változtatás, az eredmény pedig $s \xrightarrow{2.2} \xrightarrow{10} \xrightarrow{0.4} t$.

Másik példa körrel: $a \xrightarrow{2.8} \xleftarrow{10.3} \xrightarrow{0.4} \xrightarrow{15.4} a$ esetén $+0,2$ lesz a változtatás, az eredmény pedig – az élrányok figyelembevételével! – $a \xrightarrow{3} \xleftarrow{10.1} \xrightarrow{0.6} \xrightarrow{15.6} a$.)