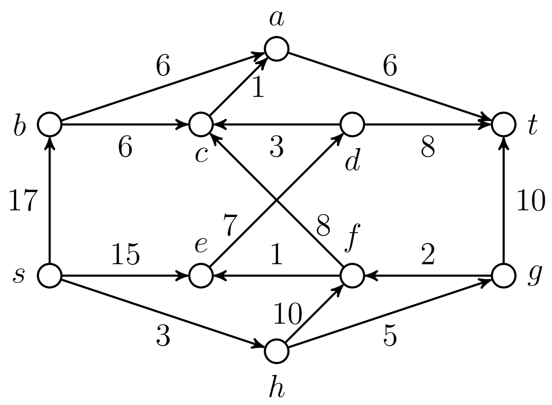
SzA VI. gyakorlat, 2015. október 16.
PERT! Továbbá körözünk, és hurrá, ZH!

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

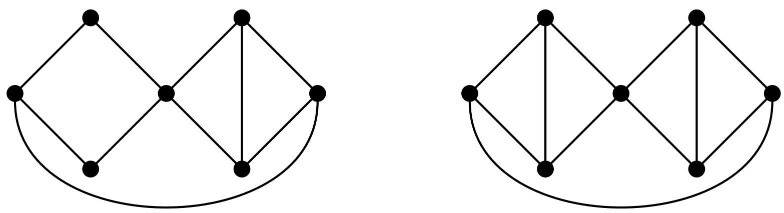
1. **[ZH 2011. november 24.]** Határozzuk meg az ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek!



2. **[ZH 2006. március 28.]** Legyen G egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?

3. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?

4. Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!



5. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?

6. Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?

7. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráf 4-reguláris, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.

---

8. Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leülhetnek egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!

9. Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!

10. Adjunk olyan eljárást, amely tetszőleges PERT probléma esetén minden tevékenységhez meghatározza azt a legkésőbbi időpontot, amikor az adott tevékenységet elkezdve a teljes PERT feladat legrövidebb idő alatti végrehajtása még éppen nem kerül veszélybe.

11. **[ZH 2012. november 22.]** Tfh az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.

12. **[pZH 2014. december 8.]** Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle.

13. **[ZH 2013. november 28.]** Tudjuk, hogy az $n \geq 20$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+4)/2$. Bizonyítsa be, hogy G -ben van két olyan Hamilton-kör, amelyeknek nincsen közös élük!

14. Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!

15. **[pZH 2011. december 1.]** Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.

16. Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_i p_j \in E(G)) \iff |i-j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út?

17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő $G = (V, E)$ gráfban minden fokszám páros és $X \subseteq V$, akkor X és $V \setminus X$ között páros számú él fut.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk!

19. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G-v$ ill. a $G-e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.

20. Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.

21. Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!

---

22. Van b darab borítékunk, az i-ediknek a hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba akkor tudjuk berakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az i-edikben benne van a j-edik, abban a k-adik, stb.

    Legyen adott egy $L > 0$ egész és a h_i és m_i számok. Hogyan lehet eldönteni, hogy kialakítható-e a borítékokból egy L hosszú lánc?

23. Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép megfertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t+1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjunk algoritmust, ami ezt a kérdést megválaszolja!