

1. A G teljes páros gráf két színsztályai legyenek $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az $a_i b_j$ él súlya pedig a jobb oldali mátrix i -edik sorának j -edik eleme. Találjunk a magyar módszerrel maximális súlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
2. A jobb oldali mátrix a G páros gráf élsúlyozását mutatja: a színsztályoknak a sorok ill. az oszlopok felelnek meg, az (i, j) pozícióban álló elem az adott él súlyát mutatja. (Ha nincs él, akkor X áll a mátrixban.) Keressünk G -ben maximális súlyú párosítást.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & X & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & X & 3 & 4 & X \\ 5 & 5 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$
3. A G teljes páros gráf két színsztályai legyenek $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ill. $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, az $a_i b_j$ -vel él súlya pedig legyen $|i - j^2|$. Adjunk meg G -ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális). (ZH '09.)
4. Legyenek a G teljes páros gráf színsztályai $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, az $a_i b_j$ él súlya pedig legyen a jobb oldali mátrix i -edik sorának j -edik eleme.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 7 & 9 & 10 \\ 7 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$
 - (a) Súlyozott lefogás-e a $w(a_i) = i, w(b_i) = i + 1$ ($1 \leq i \leq 5$)?
 - (b) Ha igen, igaz-e, hogy ez minimális összsúlyú súlyozott lefogás?
5. Kiskakond azon gondolkodik, hogy barátaival nadrágüzletet nyit az erdőben. Terveik szerint vakondok és nyulak részére fognak nadrágot árulni. A vakondok részére készülő nadrághoz 6 perc alatt lehet kiszabni, 8 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A nyulak részére készültöt pedig 12 perc alatt lehet kiszabni, 4 perc alatt összevarrni és 1 perc a gombok felvarrása. A rák, aki az anyagot szabja, hetente 1800 percet tud dolgozni, a nádirigó, aki a nadrágokat varrja össze, heti 1400 percet, míg a felesége, aki a gombfelvarrást vállalja, csak 200 percet hetente. Terveik szerint a vakondoknak való nadrágot 10 erdei petákért a nyulaknak valót 12 petákért adják. Melyik nadrágból hány darabot készítsenek, ha a bevételüket akarják maximalizálni?
6. Kiskakondék azon töprengenek, hogy megváltoztatják a nyulak részére készülő nadrág árát.
 - (a) Mennyi a nyulak részére készülő nadrág minimális- illetve maximális ára, amely mellett az 5. feladatnál kapott értékek mellett maximális bevételt kapunk?
 - (b) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 175 vakondnadrágot és 0 nyúlnadrágot gyártanak?
 - (c) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
 - (d) Lehetséges-e úgy megváltoztatni a nyulaknak készülő nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 130 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 70 nyulaknak valót?
 - (e) Lehetséges-e úgy megváltoztatni mindkét típusú nadrág árát, hogy akkor érjenek el maximális bevételt, ha 110 vakondoknak való nadrágot gyártanak és 80 nyulaknak valót?
7. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások! u és v oszlopvektorokat jelölnek, a sorvektort a 0 pedig a nullvektort (is). Mindegyik vektor dimenziója azonos.
 - (a) Ha $u \leq v$ és $u \neq v$ akkor $u < v$.
 - (b) Ha $u \leq v$ és $u \geq v$ akkor $u = v$.
 - (c) Ha $u \geq 0$ és $a \cdot u > 0$ akkor $a \geq 0$.
 - (d) Ha $u \leq v$ és $a \geq 0$ akkor $a \cdot u \leq a \cdot v$.
8. Oldjuk meg Fourier-Motzkin elimináció segítségével az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket, ill. határozzuk meg mindazon p értékeket, amelyre megoldható a rendszer.

$$\begin{array}{cccc} 2x + y + z \leq 5 & 2x + y + z \leq 5 & 2x + y + z \leq 5 & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ x + 2y - z \leq 4 & x + 2y - z \leq 4 & x + 2y - z \leq 4 & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 12 \\ z \leq 1 & z \leq 1 & z \leq 1 & x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 14 \\ x - 2y - 2z \geq -5 & x - 2y - 2z \geq -5 & x - 2y - 2z \geq -5 & x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 16 \\ x + y + z \geq 3 & x + y + z \geq 4 & x + y + z \geq 5 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq p \end{array}$$