

7. Gyakorlat

Függetlenség, Korreláció

1. Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros eredmények számát. Független-e X és Y ?
2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

- a) $p = ?$ b) $\mathbb{P}(X \leq 0, Y = 1) = ?$ c) Független-e X és Y ? d) $\mathbb{E}(XY) = ?$
3. Egy dobozban 6 golyó van, 2 fehér, 2 zöld és 2 piros. Egyesével addig húzunk visszatevés nélkül a dobozból, amíg piros golyót nem kapunk. Jelölje X a kihúzott golyók számát, Y pedig a kihúzott fehér színű golyók számát. Adjuk meg az együttes eloszlásuk táblázatát. Független-e X és Y ?
 4. Legyenek $X, Y \sim \text{Geo}(\frac{2}{3})$ függetlenek. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket:

a) $\mathbb{E}(XY)$ b) $\mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 5)$ c*) $\mathbb{P}(X = Y)$.
-
5. Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az 1, 2, 3 számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kivesszünk két cédulát. Legyen X az első, Y a második húzás eredménye.

a) $\text{cov}(X, Y) = ?$ b) $\text{cov}(X, X) = ?$ c) $\text{cov}(Y, Y) = ?$ d) $\text{corr}(X, Y) = ?$ e) Független-e X és Y ?
 6. Legyen X olyan valószínűségi változó, amire $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = 5$ és $\mathbb{E}(X^3) = 14$. Számítsuk ki a $\text{corr}(X, X^2 - 4X)$ -et. Független-e $X - 2$ és $(X - 2)^2$?
 7. Két kockával dobunk, X az egyesek száma, Y a másodiknak dobott szám. Adjuk meg X és Y

a) kovarianciáját b) korrelációját.
 8. Legyen X Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel, és $Y = 2X + 1$. Adjuk meg Y szórásnégyzetét (más néven varianciáját).
 9. Legyen $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{3})$. Adjuk meg az $\mathbb{E}((3 - X)^2)$ és a $\mathbb{D}(5 - 2X)$ mennyiségeket.
 10. Bizonyítsuk be, hogy ha X és Y azonos szórású valószínűségi változók, akkor $X + Y$ és $X - Y$ korrelálatlanok.

IMSc 6. Legyenek X és Y valószínűségi változók, eloszlásfüggvényeik F_X és F_Y . Definiáljuk X és Y Spearman-korrelációját a következő formulával: $\text{corr}(F_X(X), F_Y(Y))$ (feltéve, hogy ez létezik és véges). Adjunk példát olyan X valószínűségi változóra, amire X és X^2 korrelációja 0, de Spearman-korrelációjuk 1.