6. Gyakorlat

Diszkrét és folytonos valószínűségi változók transzformáltja

1. Legyen X egy véletlenszerűen választott hónap sorszáma, árilistól decemberig. Annak az esélye, hogy az i-edik hónapot választjuk ki $\frac{i}{72}$ ($\forall i = 4, \ldots, 12$). Legyen $Y = (-1)^X$.

   a) Határozzuk meg Y eloszlását.
   b) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$-t az Y eloszlásával számolva.
   c) Vezessük le $\mathbb{E}\left((-1)^X\right)$-et az X eloszlásával számolva is.

2. Egy szabályos tetraéder oldalaira felírtuk az első négy pozitív prímszámot. Háromszor dobunk vele. Jelölje X a dobott 7-esek számát, és legyen $Y = X^2$, $Z = X^2 + X + 1$. Határozzuk meg Y és Z várható értékét.

3. Legyen $X \sim \text{Pois}(3)$ és $Y = 3X - 1$ és $Z = X^2 - X$. Határozzuk meg

   a) Y eloszlásfüggvényének értékét a π helyen, és
   b) Z várható értékét.

4. Független kísérleteket végzünk, melyek külön-külön mind p valószínűséggel sikerülnek. Addig ismételgetjük a kísérletet, amíg 3 sikeres nem lesz. Jelölje X az ehhez szükséges sikertelen kísérletek számát. Határozzuk meg az $\mathbb{E}\left(\frac{1}{(X+2)(X+1)}\right)$ értéket (p függvényében).

5. Dobjunk egy szabályos dobókockával, jelölje az eredményt X. Adjuk meg $Y = |X - 3|$ eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg az $\int_0^\infty (1 - F_Y(y))\mathrm{d}y$ és az $\mathbb{E}(Y)$ mennyiségeket.

---

6. Legyen X sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ha $0 < x < 1$ és 0 egyébként. Legyen $Y = X\sqrt{X}$.

   a) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.
   b) Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét.
   c) Határozzuk meg Y sűrűségfüggvényét.
   d) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$-et az Y sűrűségfüggvényével számolva.
   e) Vezessük le $\mathbb{E}\left(X\sqrt{X}\right)$-et az X sűrűségfüggvényével számolva is.

7. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $x \mapsto F_X(x)$. Fejezzük ki az alábbi valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit F_X segítségével:
   a) $Y = \max\{0; X\}$ b) $Z = -X$ c) $V = |X|$ d) $W = \min\{0; -X\}$.

8. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ és $Y = X^2$. Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét.

9. Legyen $X \sim U(0; 1)$, illetve $Y = \sqrt{2X}$, $V = \ln \frac{1}{X}$ és $Z = \text{arctg}(X)$. Adjuk meg Y, V és Z sűrűségfüggvényét.

10. Az autók fogyasztását Amerikában mérföld/gallon-ban (mpg) fejezik ki, azaz megadják, hogy hány mérföldet tesz meg a gépjármű egy gallon üzemanyaggal. Európában, mint ismeretes, a fogyasztást liter/(100 km) formában adják meg. Egy autóról tudjuk, hogy az X mpg fogyasztását az f_X sűrűségfüggvény jellemzi. Hogyan kell transzformálnunk f_X-et, ha áttérünk a liter/100km skálára? (1 mérföld $= a$ km, 1 gallon $= b$ liter, ahol $a = 1{,}609$ és $b = 3{,}785$).