

12. Gyakorlat

Feltételes valószínűség folytonos esetben, Többdimenziós normális eloszlás

1. Legyen $Y \sim U(0; 1)$ és X egyenletes eloszlású az $[Y^2; Y]$ intervallumon. Mi az esélye, hogy $\mathbb{P}(X < 0,5)$?
2. Egy érmegyártó gép nem feltétlenül szimmetrikus érméket gyárt. Jelölje X egy adott érme esetén a fej eredmény valószínűségét. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = 6x - 6x^2$, ha $0 < x < 1$, és 0 egyébként. Egy ilyen érmét 4-szer feldobva mi a valószínűsége, hogy 2 fejet kapunk eredményül?
3. Egy alkalmazását a gyártó rendszeresen ellenőrzi biztonsági rések tekintetében. Tegyük fel, hogy egy adott biztonsági rés gyártó általi felfedezéséig eltelő T időnek a következő az eloszlásfüggvénye

$$F_T : t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{ha } t > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha a hibát t időpontban fedezi fel a gyártó, akkor $1 - e^{-t}$ eséllyel élnek vissza azzal. (Ha felfedezi, rögtön kijavítja, így nem élhetnek vissza vele.) Mi a valószínűsége, hogy történik visszaélés a kijavítás előtt?

4. Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, valamint legyen $U = 3X - 2Y + 1$ és $V = 7X - 5Y - 3$.
 - a) Mi $(X, Y)^T$ kovarianciamátrixa?
 - b) Mi az $(U, V)^T \sim N(\underline{m}, \underline{\Sigma})$ kétdimenziós normális eloszlás \underline{m} és $\underline{\Sigma}$ paramétere?
 - c) Mi $(U, V)^T$ sűrűségfüggvénye?
 - d) Mennyi $\text{cov}(-2U + V, 12U - 5V)$?
 - e) Független-e $-2U + V$ és $12U - 5V$?

5. Legyen $\underline{Z} \sim N(\underline{m}; \underline{\Sigma})$ ahol

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Adjunk olyan $\underline{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ alsóháromszögmátrixot és $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektort, amire $\underline{A} \cdot \underline{Z} + \underline{v}$ (kétdimenziós) standard normális eloszlású.

6. Legyen a $\underline{Z} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_{Z_1, Z_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-5(x_1+1)^2 + 7(x_1+1)(x_2+2) - \frac{5}{2}(x_2+2)^2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

Határozzuk meg $\underline{\mu}$ és $\underline{\Sigma}$ értékét.

7. Legyenek X_1, X_2, X_3 együttesen független, normális eloszlású valószínűségi változók, egységesen μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Milyen eloszlású az $Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3 - 3\mu}{\sqrt{3}\sigma}$ valószínűségi változó? Mennyi $\text{corr}(X_1, Y)$?
8. Legyenek $X \sim N(5; 2)$ és $Y \sim N(4; 3)$ függetlenek. Adjuk meg a $\mathbb{P}(X < Y)$ valószínűséget.
9. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{\pi}{e} xy & \text{ha } x, y \in [-1, 1], \\ \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- a) Adjuk meg a peremsűrűségfüggvényeket.
- b) Kétdimenziós normális eloszlású-e az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó?