Valószínűségszámítás

2020. október 7.

Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

Folytonos eset, példa

Példa: darts nyilat dobunk egy asztali földgömbre, nyaralási célt keresve.
Valószínűségi változók:

- X: Távolság légvonalban
- Y: Távolság autóval
- S: Célország zászlajában a színek száma
- T: Idő odajutni

Melyik a kakukktojás?

Az S diszkrét. Az összes többire $\mathbb{P}(X = x) = 0 \quad (\forall x)$

Nulla valószínűség

- Eseményeknél: lehetetlen $\neq$ nulla valószínűség
  (Na hát aztán?)
- Legyen X val. változó. “Eloszlása” (eddigi fogalmainkat használva) a $\mathbb{P}(X = x) = 0$ számokból áll, vagyis nem szolgál információval.
- Y a távolság autóval, T az odajutási idő.

$$A = \{Y = y\} \qquad \mathbb{P}(T < 5 \text{ óra} \mid A) =?$$

Intuitíven értelmes, formálisan értelmetlen. :-(

(Lásd még: Borel--Kolmogorov paradoxon)

Egyenletesen véletlen

"Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy pontot a $[0, 1]$ intervallumból." Mit lehet mondani egy ilyen X val. változóról?

$$\mathbb{P}(X \leq t) = t \qquad \text{ha } t \in [0, 1]$$

Az egyes értékek helyett az intervallumba esés valószínűségét nézzük.

- *Nem elég az, hogy 0 és 1 közé esik? Az is leírja, hogy milyen.*
- Nem.
- *De miért?*
- Mert csak. (Lásd következő dia.)

Nem-egyenletesen véletlen

Legyen X egyenletesen véletlen a $[0,1]$-en,
és legyen $Y = X^2$.

$$\mathbb{P}\left(Y \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$$

Vagyis Y más eloszlású, mint X.

Eml.: eloszlásfüggvény

Definíció: Az X val. változó *eloszlásfüggvénye*:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad\qquad F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$$

Megjegyzések:

- Itt használjuk, hogy $\{X < x\}$ esemény.
- Az eloszlásfüggvénye minden val. változónak értelmes.
- Miért nem kisebb-egyenlő? Ez a magyar konvenció, lehetne másképp is.

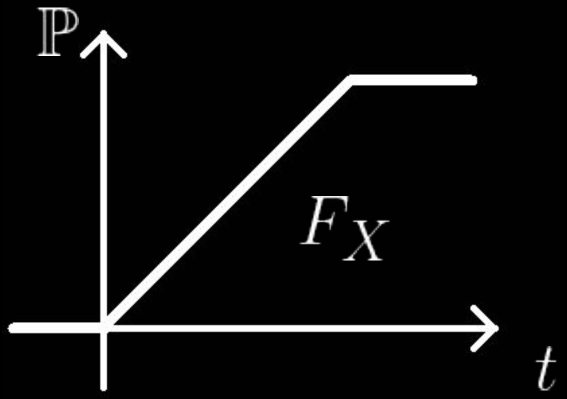
Elnevezés: X és Y *azonos eloszlás*ú, ha $F_X(x) = F_Y(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

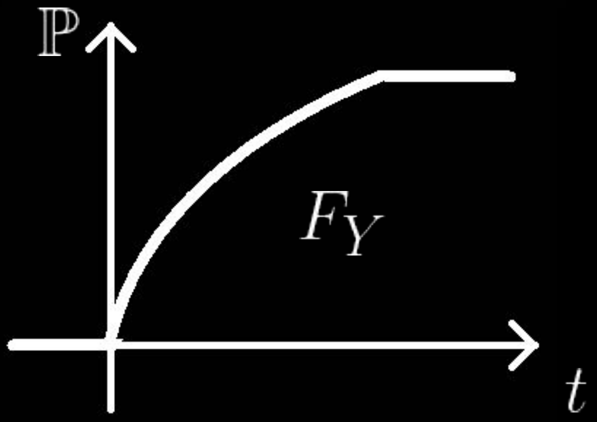
Eloszlásfv., példa

Legyen X egyenletesen véletlen a $[0,1]$-en, és legyen $Y = X^2$.

$$\mathbb{P}(X < t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0 \\ t, & \text{ha } 0 < t \le 1 \\ 1, & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y < t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0 \\ \sqrt{t}, & \text{ha } 0 < t \le 1 \\ 1, & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$



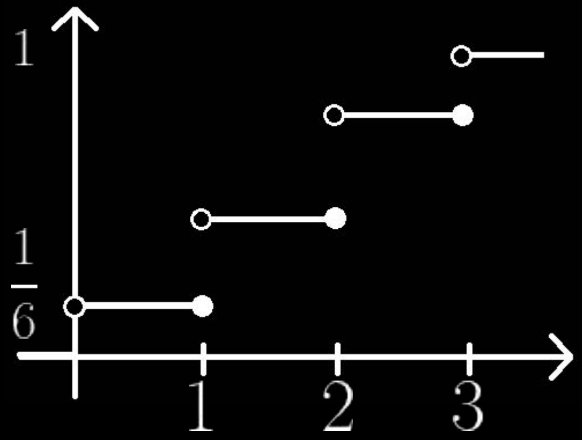


Eloszlásfv., karakterizáció

Állítás: Egy $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény pontosan akkor eloszlásfüggvénye egy val. változónak, ha F

1. monoton növő (nem feltétlenül szigorúan),
2. balról folytonos, azaz $\lim_{t \to x-0} F(t) = F(x)$
3. végtelenben 1-hez,
   negatív végtelenben 0-hoz tart.

Példa: balról folytonos, de jobbról nem feltétlenül.



Eloszlásfv., karakterizáció

Biz-részlet: Tegyük fel, hogy F az X eloszlásfüggvénye.

1) monoton növő: tetszőleges $x < y$ esetén

$$F(x) = \mathbb{P}(X < x) \leq \mathbb{P}(X < y) = F(y)$$

mert $\{X < x\} \subseteq \{X < y\}$

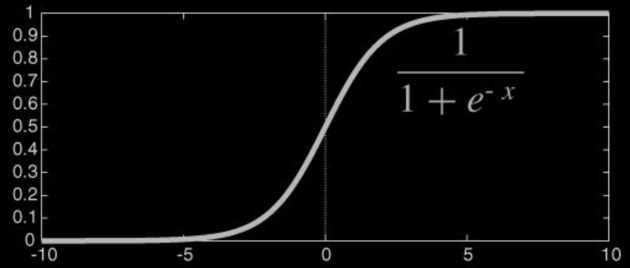
Megjegyzések:

- A másik két tulajdonsághoz szükség van a szigma-additivitásra.
- Visszafelé, hogyan lesz függvényből val. változó?
  Ötlet: Ha U egyenletes a $[0, 1]$-en és $F^{-1}(U)$ értelmes, akkor $F^{-1}(U)$ eloszlásfüggvénye F.

Eloszlásfv., példa

Példa: Tetszőleges valós x-re legyen

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$



Igaz-e, hogy ez eloszlásfüggvény?

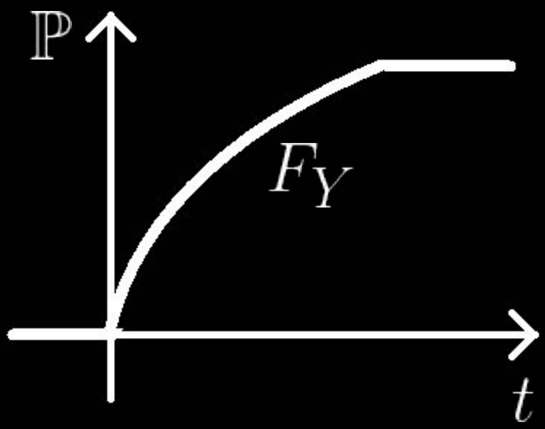
- monoton nő? Igen, mert a nevező mon. csökken.
- balról folytonos? Igen, mert folytonos.
- határértékei stimmelnek? Kiszámolható, hogy igen.

(Név: logisztikus eloszlás.)

Sűrűségfüggvény, motiváció

Probléma: az eloszlásfüggvény nem mindig elég szemléletes.

1. Melyik szám $0,01$ sugarú környezetében lesz a legnagyobb eséllyel $Y = X^2$?
2. Hányszor akkora eséllyel lesz Y az ¼ kis környezetében, mint a ¾ kis környezetében?



Megfigyelés: minél jobban nő F_Y az y pontban, annál nagyobb eséllyel esik az y pont közelébe az Y.

Sűrűségfüggvény, def.

Definíció: Egy X valószínűségi változó *folytonos*, ha létezik olyan nemnegatív $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amire

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(z)\mathrm{d}z = F_X(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Ha létezik ilyen f_X függvény, akkor azt az X *sűrűségfüggvény*ének hívjuk.

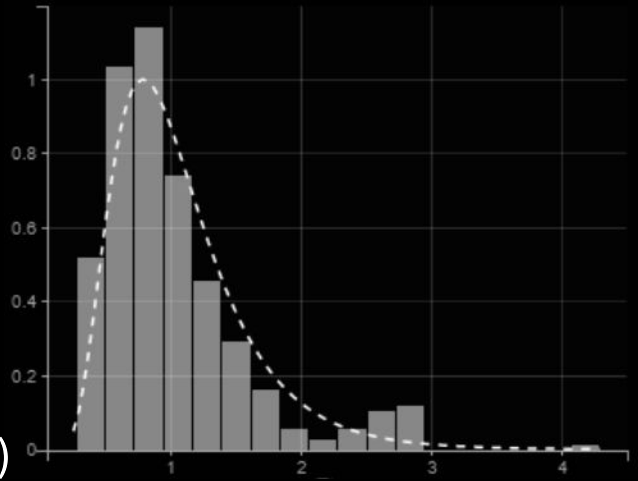
Mottó: Nem tudjuk, hogy deriválható-e az eloszlásfüggvény? Sebaj, vegyük azt a függvényt, aminek ő az integrálfüggvénye. (Radon-Nikodym derivált)

Sűrűségfv. értelme

Technikai megjegyzések:

- Itt ez improprius Riemann-integral. A feltételbe beleértjük, hogy az integrál létezik és véges.
- A sűrűségfüggvény nem egyértelmű.

Hogy kéne értelmezni a sűrűségfüggvényt?
“Folytonos histogram”: a sok kísérletből számolt relatív gyakoriság, közelítőleg a sűrűségfüggvény. (Hasonlóan ahhoz, ahogy az eloszlás is “histogram”.)



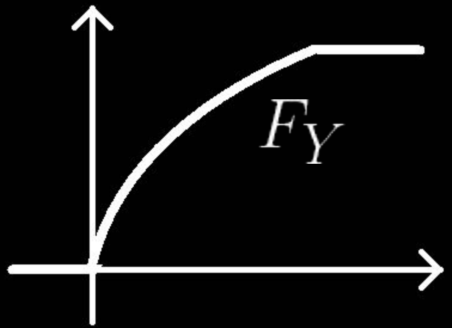
Hogy lehet kiszámolni?

Sűrűségfv. kiszámolása

Állítás: Ha F_X folytonos és végessok pont kivételével minden pontban deriválható, akkor X folytonos val. vált. és az

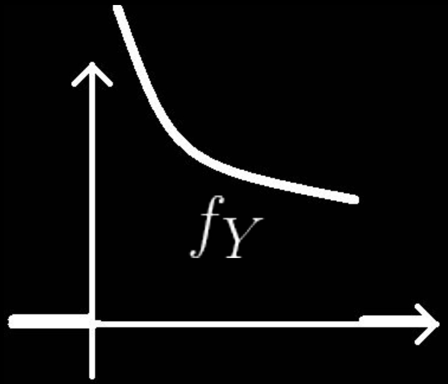
$$f(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{ha } F_X \text{ deriválható } x\text{-ben} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye.



Pl.: $F_Y(y) = \sqrt{y} \quad (\forall y \in [0,1])$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (\forall y \in [0,1])$$



Sűrűségfv., válaszok

1. Melyik szám $0{,}01$ sugarú környezetében lesz a legnagyobb eséllyel $Y = X^2$?

   A 0 körül (pontosabban $0{,}01$ körül), mert itt a legnagyobb az f_Y.

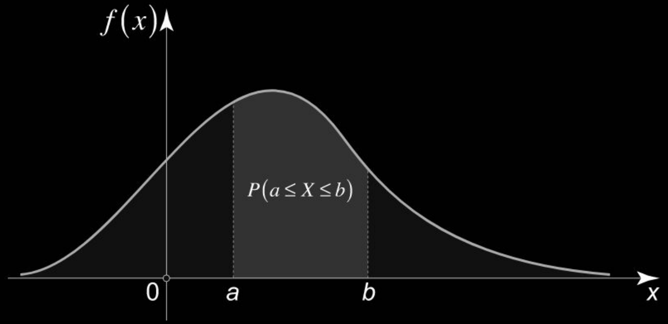
2. Hányszor akkora eséllyel lesz Y az ¼ kis környezetében, mint a ¾ kis környezetében?

$$\frac{f_Y\left(\frac{1}{4}\right)}{f_Y\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{1/4}} \Big/ \frac{1}{2\sqrt{3/4}} = \sqrt{3}$$

Sűrűségfv. tulajdonságai

Állítás: Legyen X folytonos val. változó. Ekkor minden $a < b$ esetén

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x$$



Bizonyítás: Az additivitás miatt

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) - \mathbb{P}(X = a) =$$

$$= \int_{-\infty}^b f_X(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^a f_X(x)\mathrm{d}x - 0 = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x$$

Sűrűségfv. karakterizációja

Állítás: Egy nemnegatív $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor lesz egy X val. változó sűrűségfüggvénye, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Megjegyzés: Az egyik irány egyszerű, hiszen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{z\to\infty} \int_{-\infty}^{z} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{z\to\infty} F_X(z) = 1$$

A másik irány problémásabb, itt nem tárgyaljuk.

Folytonos val. vált, példa

Példa: Z alkatrész élettartama (órában).

Tegyük fel, hogy eloszlásfüggvénye

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 100, \\ 1 - \frac{100}{x} & \text{ha } x > 100. \end{cases}$$

a) Igaz-e, hogy ez tényleg eloszlásfüggvény?

b) Mi a sűrűségfüggvénye?

$$f_Z(x) = \frac{100}{x^2} \quad (\forall x > 100)$$

c) Mi a valószínűsége, hogy az alkatrész nem romlik el az első 150 órában?

$$\int_{150}^{\infty} f_Z(x)\mathrm{d}x = \int_{150}^{\infty} \frac{100}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{100}{x}\right]_{150}^{\infty} = \frac{2}{3}$$

Várható érték, absztraktul

Definíció: Legyen X val. változó, ami

1. egyszerű: $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathrm{Ran}(X)} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$
2. nemnegatív: $$\mathbb{E}(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\substack{Z \text{ egyszerű}, \\ Z \leq X}} \mathbb{E}(Z)$$
3. általánosságban: (ha ez létezik)

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$$

ahol $X^+ = \max(X, 0) \qquad X^- = \max(-X, 0)$

Várható érték, folytonos eset

Állítás: Legyen X folytonos val. változó, amire

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t)\mathrm{d}t < \infty$$

ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\mathrm{d}t$$

Megjegyzés: A dallama nagyon hasonló az egyszerű esethez:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathrm{Ran}(X)} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

Egyenletes eloszlás

Definíció: Egy X val. változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, ha

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Jelölés: $X \sim U(a; b)$

Megj.: ez tényleg sűrűségfüggvény, hiszen nemnegatív, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Egyenletes elo. várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

És hogy kéne számolni, ha például $\mathbb{E}(X^2)$ a kérdés?

Transzformált várható értéke

Tétel: Legyen X val. változó, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(g(X))$ létezik. Ekkor

1) Ha X diszkrét:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(k_j) \cdot \mathbb{P}(X = k_j)$$

ahol $\mathrm{Ran}(X) = \{k_1, k_2, \dots\}$

2) Ha X folytonos:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Transzformált várható értéke

Példa: Legyen X olyan valószínűségi változó, amire

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - 4^{-x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(2^X) = ?$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 4^{-x}\ln(4) & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(2^X) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} 2^x \cdot 4^{-x}\ln(4)\mathrm{d}x =$$

$$\ldots = 2$$

Köszönöm a figyelmet!