# Vizsgadolgozat

Megoldás

**Tanszéki általános alapelvek** A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:

   (a) Mikor mondjuk azt, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak? $(n > 0)$

   (b) Mondjuk ki az eloszlásfüggvény karakterizációjára vonatkozó tételt.
   (Azaz pontosan milyen tulajdonságok határozzák meg, hogy egy $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvény egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye-e)?

   *Megoldás:*
   (a)
   (5 pont) páronként kizáróak
   (5 pont) uniójuk az $\Omega$
   (jegyzet 2.2.5 definíció)

   (b)
   (3 pont) monoton nő
   (2 pont) határérték $-\infty$-ben 0
   (2 pont) határérték $+\infty$-ben 1
   (3 pont) balról folytonos
   (jegyzet 4.1.3 állítás)

2. Petra és a kishúga kikészítették az ablakba a szépen kipucolt csizmájukat, amelyekbe a Mikulás hozott is sok finomságot. De a lányok a hét végére már majdnem mindent fel is faltak, csak Petra csizmájában maradt még három ezüst- és három aranypapíros szaloncukor. Ezek közül találomra hármat átrakott szomorkodó kishúga kiürült csizmájába, majd mindkét lány kivett a saját csizmájából egy-egy szaloncukrot.

Feltéve, hogy azonos színű szaloncukrot vettek ki, mekkora a valószínűsége annak, hogy a Petra által áttett szaloncukrok között pontosan két aranyszínű volt?

*Megoldás:*
Tekintsük a következő eseményeket:
(0 pont) $B$=azonos színűt húznak, $A_i$=$i$ darab aranyszínűt tett át Petra, $i = 0, 1, 2, 3$
(1 pont) A kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(A_2|B)$
(1 pont) Bayes-tételből
(2 pont) $\mathbb{P}(A_2|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A_2)\,\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B)}$
(0 pont) legyen $B_a$=mindketten aranyat húznak,$B_e$=mindketten ezüstöt húznak
(1 pont) szimmetria okokból $\mathbb{P}(B_a) = \mathbb{P}(B_e)$
(1 pont) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_a) + \mathbb{P}(B_e)$
(2 pont) $\mathbb{P}(A_i) = \frac{\binom{3}{i}\binom{3}{3-i}}{\binom{6}{3}}$
(2 pont) $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{9}{20}$, $\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{20}$ (1 pont) A teljes valószínűség tételéből
(2 pont) $\mathbb{P}(B_a) = \mathbb{P}(B_a|A_0)\,\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B_a|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_a|A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B_a|A_3)\,\mathbb{P}(A_3)$
(2-2 pont) $\mathbb{P}(B_a|A_0) = \mathbb{P}(B_a|A_3) = 0, \mathbb{P}(B_a|A_1) = \mathbb{P}(B|A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
(1 pont) Behelyettesítve: $\mathbb{P}(B_a) = 2 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{5}$
(1 pont) $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(B|A_2) = \frac{4}{9}$
(2 pont) tehát: $\mathbb{P}(A_2|B) = \dfrac{\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{20}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{2}$

3. Egy projektorhoz összesen 150 égőnk van, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású 3 óra várható értékkel. Az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett.
   (a) Közelítőleg mennyi a valószínűsége annak, hogy 462 óra után még van működő égőnk?
   (b) Milyen várható élettartamú égőket kellene vásárolnunk, hogy ez a valószínűség legalább 0.85 legyen?

*Megoldás:*
(0 pont) Jelölje $X_1, \dots X_{150}$ az egyes égők élettartamát.
(1 pont) $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{150} X_i > 462) =?$
(4 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150 \cdot 3}{\sqrt{150} \cdot 3} > \frac{462 - 150 \cdot 3}{\sqrt{150} \cdot 3}\right)$$

(1 pont) mivel exponenciális eloszlás esetén a szórás ugyanakkora mint a várható érték (1/paraméter)
(0 pont) Mivel $X_i$-k egymástól független, azonos eloszlású val. változók, ezért
(2 pont) a centrális határeloszlás-tétel miatt
(3 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150 \cdot 3}{\sqrt{150} \cdot 3}$ közelítőleg standard normális eloszlású.
(2 pont) Tehát a keresett mennyiség: $1 - \Phi\left(\frac{462-150\cdot 3}{\sqrt{150}\cdot 3}\right) = 1 - \Phi(0.3266)$
(1 pont) $\approx 1 - \Phi(0.33) = 0{,}3707$

(0 pont) A b) feladat megoldásához legyen a fenti helyett $\mathbb{E}(X_1) = m$ ismeretlen, és
(1 pont) $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{150} X_i > 462) \geq 0.85$

(1 pont) A korábbi gondolatmenetet felhasználva, a fenti egyenlőtlenség bal oldala a következőképp írható:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{150} X_i - 150\cdot m}{\sqrt{150}\cdot m} > \frac{462-150\cdot m}{\sqrt{150}\cdot m}\right)$$

(1 pont) Tehát $\Phi\left(\frac{462-150m}{\sqrt{150}\cdot m}\right) \leq 0.15$

(1 pont) vagyis $\Phi\left(-\frac{462-150m}{\sqrt{150}\cdot m}\right) \geq 0.85$

(1 pont) Táblázatból $-\frac{462-150m}{\sqrt{150}\cdot m} \geq 1.04$

(1 pont) Innen $m$-et kifejezve: $m \geq 3.3658$.

4. Kétszer dobunk egy dobókockával. Jelölje $X$ a kisebbik, $Y$ pedig a nagyobbik dobott számot.
   (a) Adjuk meg $X$ és $Y$ együttes eloszlását. Független-e a két valószínűségi változó?
   (b) Legyen $Z = 2X$ és $W = Y - 1$. Adjuk meg $Z$ és $W$ kovariancia mátrixát.

*Megoldás:*
(a)
(3 pont) Az $X$ és $Y$ valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat írja le:

| $Y$ \ $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Y peremeloszlása |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ |
| 2 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{36}$ |
| 3 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{5}{36}$ |
| 4 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 0 | 0 | $\frac{7}{36}$ |
| 5 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 0 | $\frac{9}{36}$ |
| 6 | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |
| X peremeloszlása | $\frac{11}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | |

(2 pont) nem függetlenek, ami pl abból látszik, hogy
$0 = \mathbb{P}(X=3, Y=2) \neq \mathbb{P}(X=3)\cdot\mathbb{P}(Y=2) = \frac{7}{36}\cdot\frac{3}{36}$ (más jó indoklásra is jár a pont)
(b)
(2 pont) tudja, hogy mik a kovariancia mátrix elemei
(1 pont) $\mathrm{cov}(2X, Y-1) = 2\mathrm{cov}(X,Y)$
(1 pont) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$
(1 pont) tudja a várható érték definícióját
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{91}{36}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{161}{36}$
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} i\cdot j\cdot\mathbb{P}(X=i, Y=j)$
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = ...$
(1 pont) Tehát $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1225}{1296}$, és így $\mathrm{cov}(Z,W) = \frac{2450}{1296}$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{D}^2(2X) = 4\,\mathbb{D}^2(X)$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(W) = \mathbb{D}^2(Y-1) = \mathbb{D}^2(Y)$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}\,X)^2$
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \frac{301}{36}$, $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{791}{36}$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \frac{2555}{1296} = \mathbb{D}^2(Y)$
(1 pont) a kovariancia mátrix tehát

$$\begin{pmatrix} \frac{10220}{1296} & \frac{2450}{1296} \\ \frac{2450}{1296} & \frac{2555}{1296} \end{pmatrix}.$$

5. Legyenek $X \sim N(2;4)$ és $Y \sim \mathrm{U}(0,2)$ független valószínűségi változók, és legyen

$$Z = 2X \ln Y + X^2 Y^2 - 3Y$$

Számoljuk ki az $\mathbb{E}(Z \mid Y)$ regressziót.

*Megoldás:*
(2 pont) $\mathbb{E}(Z \mid Y) = \mathbb{E}(2X \ln Y + X^2Y^2 - 3Y \mid Y) = \mathbb{E}(2X \ln Y \mid Y) + \mathbb{E}(X^2Y^2 \mid Y) + \mathbb{E}(-3Y \mid Y)$
(1 pont) mert...
(2 pont) $= \ln Y \cdot \mathbb{E}(2X \mid Y) + Y^2 \cdot \mathbb{E}(X^2 \mid Y) + \mathbb{E}(-3Y \mid Y)$
(2 pont) mert... (valahogy hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára)
(2 pont) $\mathbb{E}(-3Y \mid Y) = -3Y$
(2 pont) mert...(valahogy hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára)
(2 pont) $\mathbb{E}(2X \mid Y) = \mathbb{E}(2X)$, $\mathbb{E}(X^2 \mid Y) = \mathbb{E}(X^2)$
(2 pont) mert függetlenek
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2$
(1 pont) $= 4 + 2^2 = 8$
(3 pont) $\mathbb{E}(Z \mid Y) = 4 \cdot \ln Y + 8 \cdot Y^2 - 3 \cdot Y$

6.* Legyen $(X, Y) \sim N(\underline{m}, \underline{\underline{\Sigma}})$ kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, ahol

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(Y > 2)$ valószínűséget.
(b) Legyen $W = X - 2Y + 5$ és $Z = 3X + Y - 2$. Határozzuk meg $W$-nek $Z$-re vett lineáris regresszióját.

*Megoldás:*
(1 pont) vetületi eloszlások is normálisak
(1 pont) $Y \sim N(-3, 9)$
(1 pont) $\mathbb{P}(Y > 2) = 1 - \mathbb{P}(Y < 2)$
(2 pont) standardizáljunk $\mathbb{P}(Y < 2) = \mathbb{P}\left(\frac{Y+3}{3} < \frac{2+3}{3}\right)$
(2 pont) $= \Phi(1.67) = 0.9525$ táblázatból (két tizedes jegyre kerekítjük az $\frac{5}{3}$-ot)
(1 pont) , mert $\frac{Y+3}{3} \sim N(0,1)$
(1 pont) tehát $\mathbb{P}(Y > 2) = 0.0475$
(3 pont) a lineáris regresszió formulája: $\frac{\mathrm{cov}(Z,W)}{\mathbb{D}^2(Z)} \cdot Z + \mathbb{E}(W) - \frac{\mathrm{cov}(Z,W)}{\mathbb{D}^2(Z)} \cdot \mathbb{E}(Z)$
(2 pont) $\mathrm{cov}(Z, W) = -25$
(2 pont) $\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{D}^2(3X + Y - 2) = \mathbb{D}^2(3X + Y) = 9\,\mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) + 2 \cdot 3 \cdot \mathrm{cov}(X, Y) = 30$
(1-1 pont) a két várható érték $\mathbb{E}(W) = 13$ és $\mathbb{E}(Z) = 1$
(2 pont) behelyettesítés: $-\frac{5}{6}Z + \frac{83}{6}$