Minta vizsgafeladatok a statisztika anyagrészből, 2023/2024 ősz.
Táblázatok frissítve, képletek és megoldások javítva

1. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független és $\mathrm{N}(\vartheta; 1)$ eloszlású valószínűségi változók, ahol a $\vartheta \in \mathbb{R}$ várható érték ismeretlen (a szórásnégyzet tehát ismert és 1-gyel egyenlő). Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést a ϑ paraméterre.

2. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független és $\mathrm{N}(0; \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változók, ahol a $\sigma^2 > 0$ szórás ismeretlen (a várható érték tehát ismert és 0-val egyenlő). Adjunk a minta alapján maximum likelihood becslést a σ^2 paraméterre.[a]

3. Micimackó vásárolt 8 bödön mézet, amelyek pontos tömegét odahaza megmérte, és rendre az alábbi eredményeket kapta (kilogrammban mérve): $1{,}01, 0{,}99, 0{,}98, 0{,}99, 0{,}97, 1{,}03, 0{,}96, 0{,}99$. Normális eloszlást feltételezve (ismeretlen várható értékkel és ismeretlen szórással)
   (a) adjunk 0,98 szintű konfidenciaintervallumot a mintaelemek várható értékére,
   (b) és vizsgáljuk meg 0,04 terjedelmű próbával, hogy a mintaelemek várható értéke eléri-e az 1 kg-ot! Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, a döntést és azt, hogy mi alapján döntöttünk.

4. Egy állatkertben 10 nőstény királypiton él, az átlagos hosszuk 130 cm. Egy szakkönyv szerint a nőstény királypitonok hossza normális eloszlású 5 cm szórással. Ezt elfogadva
   (a) adjunk 0,996 szintű konfidenciaintervallumot az állatkertben élő nőstény királypitonok hosszának várható értékére,
   (b) vizsgáljuk meg 0,04 terjedelmű próbával, hogy az állatkertben élő nőstény királypitonok hosszának várható értéke megegyezik-e 128 centiméterrel. Adjuk meg H_0-t, H_1-et, a próbastatisztika értékét, a döntést és azt, hogy mi alapján döntöttünk. A próbát úgy válasszuk meg, hogy a kritikus tartományba 128-nál kisebb és 128-nál nagyobb értékek is essenek.
   (c) Tudjuk, hogy az említett 10 kígyó közül a legrövidebb 120 cm, az összes többi pedig legalább 123 cm hosszúságú. Mennyi a minta empirikus eloszlásfüggvényének értéke az $x = 122$ helyen?

Megjegyzések:

- Ezek alapvetően különleges ötletet nem igénylő, standard feladatok, amik 2–5. feladatként is előfordulhatnak. 6. feladatként lehet ennél több kreativitást igénylő feladat is.
- Lehetséges olyan feladat is, amelynek csak egy része statisztika és a többi része valszám.
- A 4. feladat egy kicsit időigényesebb az átlagos vizsgafeladatoknál, ezért lehet, hogy a vizsgán a hasonló feladatok valamivel rövidebbek lesznek.
- A feladatokhoz a jegyzetkiegészítés végén szereplő képletgyűjtemény, valamint a standard normális eloszlás és a t-eloszlás táblázata használható (adott esetben rajta lesznek a vizsgafeladatsoron). A nevezetes eloszlás táblázat mindig rajta lesz a feladatsoron, ebben a t-eloszlás nem fog szerepelni, mert csak a kvantiliseire lesz szükség, a normális eloszlás azonban igen (a többdimenziós is). A t-eloszlás táblázatának igyekszünk megszerezni a forrását.
- Maximum likelihood becslésből lehet diszkrét is (lásd a Poisson-eloszlás példáját a jegyzetkiegészítésben és a geometriai eloszlását a 12. feladatsoron).
- Statisztikából lehetnek elméleti feladatok is (a más témájú elméleti feladatokhoz hasonló jellegűek).

[a] Itt tehát az ismeretlen paraméter a szórásnégyzet (és nem a szórás). Akit zavar a számításokban, hogy ez valaminek a négyzeteként van jelölve, az nevezze σ^2 helyett mondjuk ϑ-nak.

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Konfidenciaintervallumokhoz és hipotézisvizsgálatokhoz képletek

$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x_n}^2$, $(s_n^*)^2 = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x_n})^2$, $s_n^* = \sqrt{(s_n^*)^2}$.

u-próba

1. Kétoldali, egymintás: $u = \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$,
   konfidenciaintervallum μ-re:
   $$\Big[\overline{x_n} - \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x_n} + \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}\Big].$$
2. Egyoldali, egymintás: $u = \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, $u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$.
3. Kétoldali, kétmintás: $u = \frac{\overline{x_{n_1}} - \overline{y_{n_2}}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2)$.

t-próba

1. Kétoldali, egymintás: $t = \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{s_n^*}\sqrt{n}$, $t_{n-1,\varepsilon/2}$ a t_{n-1}-eloszlás $1-\varepsilon/2$-kvantilise,
   konfidenciaintervallum μ-re:
   $$\Big[\overline{x_n} - \frac{s_n^* t_{n-1,\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x_n} + \frac{s_n^* t_{n-1,\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}\Big].$$
2. Egyoldali, egymintás: $t = \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{s_n^*}\sqrt{n}$, $t_{n-1,\varepsilon}$ a t_{n-1}-eloszlás $1-\varepsilon$-kvantilise.
3. Kétoldali, kétmintás: $t = \frac{\overline{x_{n_1}} - \overline{y_{n_2}}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)(s_x^*)^2 + (n_2-1)(s_y^*)^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$, $t_{n-1,\varepsilon/2}$ a $t_{n_1+n_2-2}$-eloszlás $1-\varepsilon/2$-kvantilise.

A t-(Student-)próba kritikus értékei

f	0,1 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01
1	6,314	12,71	31,82
2	2,920	4,303	6,965
3	2,353	3,182	4,541
4	2,132	2,776	3,747
5	2,015	2,571	3,365
6	1,943	2,447	3,143
7	1,895	2,365	2,998
8	1,860	2,306	2,896
9	1,833	2,262	2,821
10	1,812	2,228	2,764
11	1,796	2,201	2,718
12	1,782	2,179	2,681
13	1,771	2,160	2,650
14	1,761	2,145	2,624
15	1,753	2,131	2,602
16	1,746	2,120	2,583
17	1,740	2,110	2,567
18	1,734	2,101	2,552
19	1,729	2,093	2,539
20	1,725	2,086	2,528

f	0,1 0,05	0,05 0,025	0,02 0,01
21	1,721	2,080	2,518
22	1,717	2,074	2,508
23	1,714	2,069	2,500
24	1,711	2,064	2,492
25	1,708	2,060	2,485
26	1,706	2,056	2,479
27	1,703	2,052	2,473
28	1,701	2,048	2,467
29	1,699	2,045	2,462
30	1,697	2,042	2,457
40	1,684	2,021	2,423
50	1,676	2,009	2,403
60	1,671	2,000	2,390
70	1,667	1,994	2,381
80	1,664	1,990	2,374
90	1,662	1,987	2,369
100	1,660	1,984	2,364
200	1,653	1,972	2,345
500	1,648	1,965	2,334
∞	1,645	1,960	2,326

Az eloszlás szabadságfoka f, az oszlopok felett a próba terjedelmét adtuk meg, a felső érték kétoldali, az alsó egyoldali ellenhipotézisre vonatkozik.

Megoldások:

1. (2 pont) A mintaelemek sűrűségfüggvénye (ϑ-tól függően) $f_\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\vartheta)^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. (Ha a képlet és az f_ϑ jelölés szerepel, az elég.)
   (4 pont) Így a likelihood-függvény $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\vartheta)^2}{2}}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. (Elég a végeredmény és az, hogy legalább impliciten kiderül, hogy a likelihood-függvény az f_ϑ-értékek szorzata.)
   (1 pont) arra az ötletre, hogy a log-likelihood-függvénnyel kellene dolgozni (akkor is, ha a folytatás nem jó).
   (3 pont) Az előbbiek alapján a log-likelihood-függvény $l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = \ln L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = -(n/2)\ln(2\pi) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\vartheta)^2}{2}$ $(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R})$. (Ha a végeredmény jó, nem kellenek részletszámítások, de annak ki kell derülnie, hogy a log-likelihood-függvény a likelihood-függvény logaritmusa, különben max. 2 pont.)
   (1 pont) arra, hogy a log-likelihood függvényt deriválja és megnézi, hogy a derivált hol 0, akkor is, ha nem jó a derivált. (Ezt az egy pontot meg lehet akkor is adni, ha a sima likelihood-függvényt deriválja és arról nézi meg, hogy hol 0, de ez persze nem túl célszerű megoldás.)
   (2 pont) $\frac{\partial}{\partial\vartheta} l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) (= \sum_{i=1}^n (x_i - \vartheta)) = \sum_{i=1}^n x_i - n\vartheta$
   (2 pont) $= 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{x_n}$. (Az átlag jelölést nem muszáj használni.)
   (2 pont) $\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} l_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) = -n < 0$,
   (1 pont) ezért az $\overline{x_n}$ helyen valóban maximum(a) van (a (log-)likelihood-függvénynek).
   (1 pont) Tehát (az $(x_1, \ldots, x_n)$ realizációhoz tartozó maximum likelihood becslés) $\vartheta_*(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{x_n}$ (ha a következő lépés jó, ezt a pontot nem vonjuk le),
   (1 pont) és így (a maximum likelihood becslés) $\vartheta_*(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X_n}$. (Az átlag jelölést itt sem muszáj használni.)

2. (2 pont) A mintaelemek sűrűségfüggvénye (σ^2-től függően) $f_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
   (3 pont) Így a likelihood-függvény $L_{\sigma^2}(x) = \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i) = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{n/2} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2}}$. (Elég a végeredmény és az, hogy legalább impliciten kiderül, hogy a likelihood-függvény az f_{σ^2}-értékek szorzata.)
   (1 pont) arra az ötletre, hogy a log-likelihood-függvénnyel kellene dolgozni (akkor is, ha a folytatás nem jó).
   (2 pont) Az előbbiek alapján a log-likelihood-függvény $l_{\sigma^2}(x_1, \ldots, x_n) = \ln L_{\sigma^2}(x_1, \ldots, x_n) = -(n/2)\ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2}$ $(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R})$. (Ha a végeredmény jó, nem kellenek részletszámítások, de annak ki kell derülnie, hogy a log-likelihood-függvény a likelihood-függvény logaritmusa, különben max. 1 pont.)
   (1 pont) arra, hogy a log-likelihood függvényt deriválja és megnézi, hogy a derivált hol 0, akkor is, ha nem jó a derivált. (Ezt az egy pontot meg lehet akkor is adni, ha a sima likelihood-függvényt deriválja és arról nézi meg, hogy hol 0, de ez persze nem túl célszerű megoldás.)
   (2 pont) $\frac{\partial}{\partial(\sigma^2)} l_{\sigma^2}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{2\pi n/2}{2\pi\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2(\sigma^2)^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2(\sigma^2)^2}$ (ha valakinek ez megy a közbülső lépés nélkül, úgy is OK, de hibás számítás esetén részletpont nem jár anélkül)
   (2 pont) $= 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$.
   (2 pont) $\frac{\partial^2}{\partial^2(\sigma^2)} l_{\sigma^2}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{(\sigma^2)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2}{(\sigma^2)^3}$,
   (2 pont) ami $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ esetén $\frac{\partial^2}{\partial^2(\sigma^2)} l_{\sigma^2}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{(\sigma^2)^2} - 2\frac{n}{(\sigma^2)^2} < 0$,
   (1 pont) ezért a $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$ helyen valóban maximum(a) van a ((log-)likelihood-függvénynek).
   (1 pont) Tehát (az $(x_1, \ldots, x_n)$ realizációhoz tartozó maximum likelihood becslés) $\sigma_*^2(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$ (ha a következő lépés jó, akkor ezt a pontot nem vonjuk le),

(1 pont) és így (a maximum likelihood becslés) $\vartheta_*(X_1,\ldots,X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. [b]

3. a) (8 pont)
   (0 pont) Jelöljük a mintaelemeket $X_1,\ldots,X_8$-cal. A mintaelemszám $n = 8$.
   (1+1 pont) A mintaátlag $\overline{X_8} = 0{,}99$. (Ebből 1 pont az indoklásra jár, de nem kell túlzásba esni a számítások részletezésénél.)
   (1 pont) Az empirikus szórás $S_8^* = \sqrt{(S_8^*)^2} = \sqrt{\frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^8 (X_i - 0{,}99)^2}$ (kisbetűkkel is OK minden végig)
   (1 pont) $(= \sqrt{34/70000})(\approx 0{,}0204)$. (A kettő közül az egyik elég. Itt a kerekítetlen értékkel számolunk tovább.)
   (1 pont) A szabadsági fok $n - 1 = 7$, illetve $\varepsilon = 0{,}02$ (elég, ha ezek később derülnek ki).
   (1 pont) $t_{n-1,1-\varepsilon/2} = t_{7,0{,}01} = 2{,}998$ (a táblázat alapján). (1 pont) A (táblázatban megadott képletbe behelyettesítve a) konfidenciaintervallum így $[0{,}99 - \frac{\sqrt{34/70000}\cdot 2{,}998}{\sqrt{8}}, 0{,}99 + \frac{\sqrt{34/70000}\cdot 2{,}998}{\sqrt{8}}]$ (ha korábban valamit elszámolt, de konzisztensen helyettesíti be a dolgokat a képletbe, akkor jár ez a pont)
   (1 pont) $= [0{,}9666, 1{,}0134]$. (Az előző lépéssel összevonható.)
   b) (12 pont)
   (2 pont) arra az ötletre, hogy egymintás t-próbát kell használni. Elég, ha a megoldásból impliciten kiderül, hogy azt használ.
   Ha nem t-próbával számol, hanem egymintás u-próbával, akkor ez a 2 pont nem jár, de a további pontok járnak, ha az egymintás u-próbának megfelelő módon számol, csak még 1 pontot levonunk azért, mert nem világos, hogy honnan veszi σ értékét. Ha kétmintás próbát akar alkalmazni, akkor sajnos az egész b) feladat rossz, legfeljebb azokra a mennyiségekre lehet pontot adni, amiket a helyes megoldáshoz szükséges mennyiségek közül menet közben valamiért kiszámol.
   (2 pont) $H_0\colon \mu \geq 1$ vs. $H_1\colon \mu < 1$ (ahol μ jelöli a mintaelemek várható értékét – ezt nem baj, ha nem írja oda.)
   Ha nem jó a nullhipotézis, ez a 2 pont nem járhat, viszont a további pontok igen, ha azok megfelelnek az általa választott nullhipotézisnek (akkor is, ha u-próbát használ, kivéve az említett 1 pont levonást). Kivéve ha azt írja, hogy $H_0\colon \mu > 1$ vs. $H_1\colon \mu \leq 1$, akkor 1 pont jár a 2-ből.
   (0 pont) A szabadsági fok most is $n - 1 = 7$.
   (2 pont) A próbastatisztika értéke $t(X_1,\ldots,X_8) = \frac{\overline{X_8}-\mu_0}{S_8^*}\sqrt{8} = \frac{0{,}99-1}{\sqrt{34/70000}}\sqrt{8}$ (ha csak t-t ír argumentum nélkül, azért ne vonjunk le pontot)
   (1 pont) $\approx -1{,}2834$.
   (1 pont) arra, hogy tudja, hogy most $\varepsilon = 0{,}04$ (mivel egyoldali a próba). Elég, ha ez impliciten derül ki.
   (2 pont) H_0-t akkor utasítjuk el, ha $t(X_1,\ldots,X_8) < (-t_{n-1,\varepsilon} =) - t_{7,0{,}04}$
   (1 pont) $= -2{,}046$. (Mindez ugyanúgy jó ekvivalensen megfogalmazva, elfogadással. Nem baj, ha nem szigorú egyenlőtlenséggel fogalmazza meg az elutasítás kritériumát, vagy ha szigorúval az elfogadásét.)
   (1 pont) Ezért H_0-t elfogadjuk. (Azaz arra következtetünk, hogy a mintaelemek várható értéke eléri az 1 kg-ot – nem baj, ha ezt nem írja oda szövegesen, de legyen ott expliciten, hogy mi a döntés.)

4. a) (6 pont)
   (0 pont) A minta elemszáma $n = 10$ és

[b] *Megjegyzés*: a 20 pontért itt nem várjuk el annak megvizsgálását, hogy a maximum nem a $\sigma^2 = 0$ határpontban helyezkedik-e el, de a teljes megoldáshoz természetesen ez is szükséges. Ha $\sigma^2 = 0$ (elfajuló eset), akkor minden x_i mintaelem 1 valószínűséggel 0. Ebben az esetben $\vartheta_*(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$ is 0, vagyis az előbbi képlettel helyes eredményt kapunk, minden más esetben pedig $L_{\sigma^2}(0,0,\ldots,0) = 0$, tehát nem lehet a 0-ban a maximum.

(1 pont) $\sigma = 5$ és $\overline{X_{10}} = 130$. (Utóbbi jó kisbetűvel is, és elég, ha később derül ki.)
(1 pont) $\varepsilon = 0{,}004$ (elég, ha később kiderül az, hogy $1 - \varepsilon/2 = 0,998$).
(2 pont) $u_{\varepsilon/2}(= \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)) = \Phi^{-1}(0{,}998) = 2{,}88$ (ebből 1 pont az indoklásra – elég annyi, hogy milyen számot keres ki a normális eloszlás táblázatából).
(1 pont) Így a konfidenciaintervallum (a táblázatban szereplő képlet alapján)
$[130 - \frac{5\cdot 2{,}88}{\sqrt{10}}, 130 + \frac{5\cdot 2{,}88}{\sqrt{10}}]$
(1 pont) $\approx [125{,}4463, 134{,}5537]$.
b) (10 pont)
(1 pont) arra, hogy tudja, hogy kétoldali próba kell (akkor is, ha a megoldás későbbi része esetleg nem jó, és akkor is, ha ezt nem említi, de jó nullhipotézist ír fel). Ezt itt nem is különösebben kell indokolni, de abból a feltételből következik, hogy az elfogadási tartományba mind 128-nál kisebb, mind 128-nál nagyobb számoknak bele kell esniük.
(2 pont) arra, hogy tudja, hogy egymintás u-próba kell (az előző ponthoz hasonlóan itt sem kell indoklás, és elég, ha a későbbiekben derül ki, hogy az u-próbának megfelelően számol).
(2 pont) $H_0\colon \mu = 128$ vs. $H_1\colon \mu \neq 128$. (Ez akkor is jár, ha pl. t-próbát próbál alkalmazni, de jó nullhipotézissel.)
(1 pont) A próbastatisztika értéke $u(X_1, \ldots, X_8) = \frac{\overline{X_{10}} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{10} = \frac{130-128}{5}\sqrt{10} = \frac{2}{5}\sqrt{10} \approx 1{,}265$.
(2 pont) H_0-t pontosan akkor utasítjuk el, ha $|u(X_1, \ldots, X_8)| > \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2) = \Phi^{-1}(0{,}98)$ (az $1 - \varepsilon/2$ jelöléshez itt nem ragaszkodunk, de annak ki kell derülnie, hogy milyen helyen veszi a Φ-t. Lehet azt is írni ekvivalensen, hogy mikor fogadjuk el H_0-t)
(1 pont) $\approx 2{,}05$.
(1 pont) Tehát H_0-t elfogadjuk. (Más szavakkal: arra következtetünk, hogy az állatkertben élő nőstény királypitonok hosszának várható értéke megegyezik 128 centiméterrel, de ezt nem kell szavakkal kiírni.)
(c) 4 pont
(2 pont) Az empirikus eloszlásfüggvény értéke az $x = 122$ helyen $F^*_{10}(122) = 1/10$ (nem baj, ha máshogy jelöli az empirikus eloszlásfüggvényt vagy nem jelöli sehogy),
(2 pont) mert... (valahogy megindokolja, hogy $F^*_{10}(122)$ értéke a 122-nél kisebb mintaelemek számának egytizede, és pont egy 122 cm-nél rövidebb kígyó van).