

5. Gyakorlat

Folytonos valószínűségi változók várható értéke, Sűrűségfüggvény karakterizációja

1. Az egységnyezeten találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P -hez legközelebbi oldal és a P pont távolságát.
 - a) Legyen $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ az eseményterünk. Írjuk fel X -et, mint $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt.
 - b) Mi X eloszlás- és sűrűségfüggvénye?
2. Az egységnyi oldalú négyzet két átlellenes oldalán találomra választunk egy a és egy b pontot. Jelöljük X -szel a két pont távolságának négyzetét.
 - a) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.
 - b) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.
 - c) Átlagosan mekkora X ?
 - d) Hol a legnagyobb X sűrűségfüggvényének értéke?
3. Adjuk meg az ötös lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének értékét a 25 helyen. Folytonos-e ez az eloszlásfüggvény?
4. A $(0, 1)$ intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Jelölje Y a középső pontot.
 - a) Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.
 - b) Mennyi Y várható értéke?
5. Egy benzinkút üzemanyagtartályát hetente teletöltik. Jelölje X a heti fogyasztást (százezer literekben), melynek sűrűségfüggvénye:

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mekkora legyen a tartály kapacitása, hogy annak a valószínűsége, hogy a héten kifogy az üzemanyag, kisebb legyen 0,05-nél? Mekkora az átlagos heti fogyasztás?

6. Eloszlásfüggvények-e az alábbi hozzárendelési szabályú $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények?
 - a) $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
 - b) $F(x) = e^{-e^{-x}}$
 - c) $F(x) = 1 - e^{-x^2}$
 - d) $F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$
7. Határozzuk meg az α értékét, ha tudjuk, hogy f sűrűségfüggvény. Adjuk meg az eloszlásfüggvényt is.
 - a) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha(2x - x^2) & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
 - b) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{x-2} & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
 - c) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{x-2} & \text{ha } 3 < x < 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
 - d) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha \cos \frac{x}{2} & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

*e) Az egyes részfeladatokban milyen x esetén lesz $\mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{2}$, ahol X az a valószínűségi változó, aminek a sűrűségfüggvénye a fenti? (Ezt az x -et hívják az eloszlás mediánjának.)
8. A Plútó törpebolygón lévő kráterek átmérőinek (km-ben vett) eloszlását közelítőleg az alábbi sűrűségfüggvényű S valószínűségi változóval írhatjuk le:

$$f_S : x \mapsto \begin{cases} cx^{-\frac{5}{2}} & \text{ha } x > d, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(S > 9) = 0,2689$.

- a) Határozzuk meg c értékét.
- b) Határozzuk meg d értékét.

IMSc 5. Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy P pontot egy egység sugarú körvonalon. Jelölje O a kör középpontját. Vegyünk fel egyenletesen véletlenszerűen egy S pontot a PO szakaszon. Tekintsük a körnek azt a húrját, ami a PO sugárra merőleges, és azt éppen az S pontban metszi. Mi a húr hosszának eloszlásfüggvénye?