

3. Gyakorlat

Feltételes valószínűség, Teljes valószínűség tétele, Bayes-formula

- Egy szabályos dobókockával dobunk, jelölje az eredményét x . Legyenek

$$A = \{x \text{ prím}\} \quad B = \{x \text{ páros}\} \quad C = \{x \leq 4\}$$
 események. Független-e A és C ? Ha tudjuk, hogy x páros, mekkora eséllyel lesz prím? Azaz $\mathbb{P}(A | B) = ?$
 - Mennyi annak a valószínűsége, hogy két, egymástól függetlenül kitöltött lottószelvény közül legalább az egyik pontosan négytalálatos?
 - Az A és B események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik. Ha $\mathbb{P}(A | B) = 0,2$ és $\mathbb{P}(B | A) = 0,5$, mennyi $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ illetve $\mathbb{P}(A | \bar{B})$? Független-e A és B ?
 - Számoljuk ki annak a feltételes valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páros feltéve, hogy összegük legalább tíz.
 - Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e A és B .
-
- Először húzunk egy lapot egy 52 lapos franciakártya-csomagból. Ha ez *pikk*, egyszer, egyébként kétszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos dobás?
 - Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk taláalomra három-három labdát, közben minden játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván ha volt köztük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom kivételhez egy új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?
 - Négy várost utak kötnek össze a következőképp: A-t összeköti út B-vel illetve C-vel, hasonlóan D-t összeköti út B-vel és C-vel, továbbá megy egy út B és C városok között is. Egy adott téli napon az egyes útszakaszokon egymástól függetlenül $1/5$ valószínűséggel alakul ki hótorlasz. Mekkora a valószínűsége, hogy az adott napon el lehet jutni A-ból D-be?
 - Két urna közül az egyikben 5 zöld és 7 kék, a másikban 3 zöld és 8 kék golyó van. Az elsőből átrakunk két véletlenszerűen választott golyót a másodikba. Ezután a másodikból visszateszünk egy véletlenszerűen választott golyót az elsőbe. Újból az elsőből húzva egy golyót, mennyi a valószínűsége, hogy kéket húztunk?
-
- Feldobunk két szabályos dobókockát és ha k darab hatos az eredmény, akkor k piros és $2 - k$ sárga golyót teszünk egy (kezdetben üres) dobozba. Ezután kétszer húzunk visszatevéssel: mindkét húzásra piros golyót húzunk. Mit tippelnénk k értékére? Mekkora esélyünk van eltalálni?
 - Adott egy vizsgakérdés, három lehetséges válasszal. Egy hipotetikus hallgató p valószínűséggel tudja a helyes választ, míg ha nem tudja tippel (egyenlő eséllyel választva a három válasz közül). Feltéve, hogy helyesen válaszolt, mi a valószínűsége, hogy tudta is a választ a hallgató? Mi a helyzet $p = \frac{1}{4}$ esetén?
 - Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyszor, amennyit a kocka mutat.
 - Mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet?
 - Feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?
-

IMSc 3. Jelöljön "rand" egy 10000 hosszú sorozatot, aminek tagjai 0 és 1 közti, véletlenszerűen, egymástól függetlenül választott valós számok. Vegyük a következő három – python nyelven leírt, de pseudo-kódként is értelmezhető – függvényt (ahol a "next" függvény értéke a "rand" soron következő eleme, avagy "None", ha a sorozat végére értünk). Közelítőleg mekkora eséllyel lesz a func1(rand) eredménye 3? (A számolásban feltehető, hogy ha 10000 helyett 9999 hosszú lenne a sorozat, az lényegében nem változtatna az eredményen.)

```
def func1(rand):
    x = next(rand, None)
    if x is None:
        return 1
    if x < 0.7:
        return func1(rand)
    elif x < 0.9:
        return func2(rand)
    else:
        return func3(rand)

def func2(rand):
    x = next(rand, None)
    if x is None:
        return 2
    if x < 0.1:
        return func1(rand)
    elif x < 0.9:
        return func2(rand)
    else:
        return func3(rand)

def func3(rand):
    x = next(rand, None)
    if x is None:
        return 3
    if x < 0.3:
        return func1(rand)
    elif x < 0.6:
        return func2(rand)
    else:
        return func3(rand)
```