

## 11. Gyakorlat

Feltételes várható érték, Teljes várható érték tétele

1. Egyenletesen véletlenszerűen választok egy  $U$  számot az  $[1; 2]$  intervallumon. Az  $U$  ismeretében várok  $U$  paraméterű exponenciális ideig, jelölje a várakozás idejét  $M$ .

a) Mennyi  $\mathbb{E}(M | U)$ ?      b) Határozzuk meg  $(U, M)$  együttes sűrűségfüggvényét.

2. Legyen  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adjuk meg az

- a)  $f_{Y|X}(y | x)$  sűrűségfüggvényt,      b)  $\mathbb{E}(Y | X)$  feltételes várható értéket,  
c)  $(X, Y)$  kovarianciamátrixát és      d)  $Y$ -nak  $X$ -re vonatkozó lineáris regresszióját.

3. Legyen  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{4}{5}(x + y + xy) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adjuk meg az  $\mathbb{E}(X | Y)$  regressziót.

4. Legyenek  $X \sim N(0; 1)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(2)$  független valószínűségi változók. Számoljuk ki az alábbiakat.

- a)  $\mathbb{E}(3X - Y + 1 | X)$       b)  $\mathbb{E}((2XY)^2 - 7Y | X)$   
c)  $\mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2 | X + Y)$       d)  $\mathbb{E}(X^2 \text{tg}(Y) + \frac{5X}{Y} - 2Y | Y)$

5. Háromszor dobunk egy szabályos kockával. Jelölje  $X$  a legkisebb,  $Y$  pedig a legnagyobb értéket. Adjuk meg az  $\mathbb{E}(X | Y = 3)$  feltételes várható értéket.

6. Négyyszer dobunk egy szabályos érmével. Jelölje  $Y$  az összes fejdobás számát,  $A$  pedig azt, hogy a második dobás lesz először fej. Adjuk meg az  $\mathbb{E}(Y | A)$  feltételes várható értéket.

7. Egy szabályos kockával  $n$ -szer dobunk. Jelölje  $X$  a hatos,  $Y$  pedig a páros dobások számát. Számoljuk ki az  $\mathbb{E}(Y | X)$  regressziót.

8. Egy érme  $p$  valószínűséggel landol a fej oldalán, ahol  $p$  egyenletesen helyezkedhet el az  $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$  intervallumon. Várhatóan hány dobásra lesz szükség ezzel az érmével, ha az első fejjel folytatjuk az érmedobás kísérletet.

9. Legyen  $X \sim \text{Exp}(4)$  valószínűségi változó. Az  $X$  kiértékelése után választunk egy  $Y$  számot a  $(0; X)$  intervallumon egyenletesen.  $\mathbb{E}(Y) = ?$

10. Egy iratot keresünk, ami az íróasztalunk két fiókjának valamelyikében van,  $\frac{2}{3}$  eséllyel a felső fiókban, egyébként az alsóban. A felső fiók átnézése 7 percig tart, az alsó fióké 3 percig. Tegyük fel, hogy az iratot csak az öt tartalmazó fiók teljes átnézése után találjuk meg. Várhatóan mennyi időbe telik megtalálni az iratot, ha az átnézést

a) a felső fiókkal,      b) az alsó fiókkal kezdjük?

11. Egy bányában eltévedt egy ember, aki egy csomópontban áll, ahonnan három irányba mehet tovább. Az első irányt választva kijut a bányából egy óra alatt, a második irányt választva visszaérkezik ugyanide 2 óra alatt, a harmadik irányt választva pedig 3 óra alatt ér vissza ugyanide. Feltéve, hogy minden esetben, amikor választania kell, akkor egyenlő valószínűséggel választja bármelyik opciót, várhatóan mennyi idő múlva jut ki a bányából?

- IMSc 10. Legyenek  $X, Y \sim N(0; 1)$  független valószínűségi változók,  $V = 3X + 2Y$  és  $W = 2X - Y$ . Adjuk meg az  $\mathbb{E}(V|W)$  feltételes várható értéket.