

Valószínűesszámitás és statisztika, 2. fejezet

Tartalom

- ▶ Események függetlensége
- ▶ Feltételes valószínűség
- ▶ Többlépcsős kísérletek, szorzási szabály, teljes valószínűség tétele
- ▶ Bayes-tétel
- ▶ Alkalmazás: Karger algoritmus

Két esemény függetlensége

(2.1.1. Definíció) Az A és B eseményeket függetlennek nevezzük, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

- ▶ Első példa: egy kockával dobunk, jelölje az eredményt x . Függetlenek-e az $A = \{x \text{ prím}\}$ és a $B = \{x \text{ páros}\}$ események?
- ▶ A definícióban A és B szerepe felcserélhető
- ▶ Emiatt: A és B függetlensége azt jelenti, hogy A előfordulását B előfordulása nem befolyásolja (és ugyanez fordítva is igaz)
- ▶ **Figyelem:** a függetlenség nem azt jelenti, hogy a két esemény metszete az üreshalmaz (éppen ellenkezőleg)

(2.1.3. Állítás) Ha A és B függetlenek, akkor A és $\overline{B}$ is függetlenek.
(Bizonyítás)

Két esemény függetlensége

(2.1.1. Definíció) Az A és B eseményeket függetlennek nevezzük, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

- ▶ Első példa: egy kockával dobunk, jelölje az eredményt x . Függetlenek-e az $A = \{x \text{ prím}\}$ és a $B = \{x \text{ páros}\}$ események?
- ▶ A definícióban A és B szerepe felcserélhető
- ▶ Emiatt: A és B függetlensége azt jelenti, hogy A előfordulását B előfordulása nem befolyásolja (és ugyanez fordítva is igaz)
- ▶ **Figyelem:** a függetlenség nem azt jelenti, hogy a két esemény metszete az üreshalmaz (éppen ellenkezőleg)

(2.1.3. Állítás) Ha A és B függetlenek, akkor A és $\bar{B}$ is függetlenek.
(Bizonyítás)

Több esemény függetlensége

Emlékeztető: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

(2.1.4. Definíció.) Az $A_1, \dots, A_n$ események (együttesen) függetlenek, ha minden $I \subseteq [n]$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i). \quad (1)$$

Más szavakkal az események közül valahány metszetének valószínűsége a valószínűségek szorzata.

Ez a bonyolult definíció szükséges, ugyanis:

- ▶ (1) nem következik abból, hogy bármely $i, j \in [n]$, $i \neq j$ esetén A_i és A_j függetlenek. Ha az utóbbi teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $A_1, \dots, A_n$ páronként függetlenek, ami gyengébb feltétel az együttes függetlenségnél.

(Azaz ha együttesen függetlenek, akkor páronként is, de fordítva nem igaz.) (Lásd 2.1.5. Példa.)

- ▶ (1) pl. $n = 3$ -ra abból sem következik, hogy $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$
(Össznépi gyakorlat: 2.9. feladat)

Több esemény függetlensége

Emlékeztető: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

(2.1.4. Definíció.) Az $A_1, \dots, A_n$ események (együttesen) függetlenek, ha minden $I \subseteq [n]$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i). \quad (1)$$

Más szavakkal az események közül valahány metszetének valószínűsége a valószínűségek szorzata.

Ez a bonyolult definíció szükséges, ugyanis:

- ▶ (1) nem következik abból, hogy bármely $i, j \in [n]$, $i \neq j$ esetén A_i és A_j függetlenek. Ha az utóbbi teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $A_1, \dots, A_n$ páronként függetlenek, ami gyengébb feltétel az együttes függetlenségnél.

(Azaz ha együttesen függetlenek, akkor páronként is, de fordítva nem igaz.) (Lásd 2.1.5. Példa.)

- ▶ (1) pl. $n = 3$ -ra abból sem következik, hogy $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$
(Össznépi gyakorlat: 2.9. feladat)

Feltételes valószínűség

Példa: kockadobás szabályos dobókockával, $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. Tudjuk:

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Tegyük fel, hogy úgy dobunk a kockával, hogy nem látjuk az eredményt, és valaki megmondja nekünk, hogy a dobott szám **páros**.

Hogyan változnak a valószínűségek ezen **extra információ** ismeretében?

Erre a helyzetre új valószínűségeket vezetünk be, jelöljük ezeket $\tilde{\mathbb{P}}$ -vel (egyelőre – hamarosan lesz jobb jelölés). Az intuíció, illetve a valószínűségi mérték definíciója szerint:

$$\tilde{\mathbb{P}}(2) = \tilde{\mathbb{P}}(4) = \tilde{\mathbb{P}}(6) = \frac{1}{3},$$

és

$$\tilde{\mathbb{P}}(1) = \tilde{\mathbb{P}}(3) = \tilde{\mathbb{P}}(5) = 0.$$

Feltételes valószínűség

Példa: kockadobás szabályos dobókockával, $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. Tudjuk:

$$\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(2) = \dots = \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Tegyük fel, hogy úgy dobunk a kockával, hogy nem látjuk az eredményt, és valaki megmondja nekünk, hogy a dobott szám **páros**.

Hogyan változnak a valószínűségek ezen **extra információ** ismeretében?

Erre a helyzetre új valószínűségeket vezetünk be, jelöljük ezeket $\tilde{\mathbb{P}}$ -vel (egyelőre – hamarosan lesz jobb jelölés). Az intuíció, illetve a valószínűségi mérték definíciója szerint:

$$\tilde{\mathbb{P}}(2) = \tilde{\mathbb{P}}(4) = \tilde{\mathbb{P}}(6) = \frac{1}{3},$$

és

$$\tilde{\mathbb{P}}(1) = \tilde{\mathbb{P}}(3) = \tilde{\mathbb{P}}(5) = 0.$$

Feltételes valószínűség

(2.2.1. Definíció.) Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(A) > 0$. Ekkor a B esemény A -ra vett feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Kiolvasva: „ B valószínűsége, feltéve A ”.

- ▶ A formula nem szimmetrikus, A és B szerepei különbözők.
Kell: $\mathbb{P}(A) > 0$. Nem kell: $\mathbb{P}(B) > 0$ (és ha $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B) = 0$, akkor $\mathbb{P}(B|A) = 0$ is teljesül).
- ▶ **Állítás:** Ha A, B események és $\mathbb{P}(A) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
(Intuíció: A bekövetkezése nem befolyásolja B valószínűségét.)
- ▶ (2.2.2. Példa: kockadobás extra információval)

Feltételes valószínűség

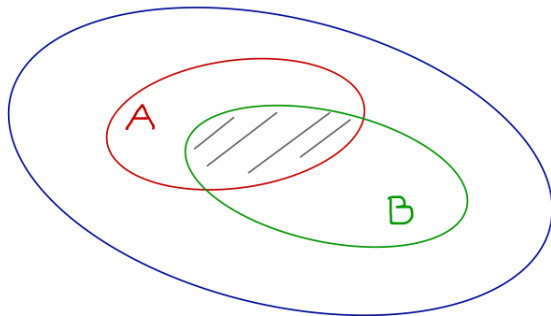
(2.2.1. Definíció.) Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(A) > 0$. Ekkor a B esemény A -ra vett feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Kiolvasva: „ B valószínűsége, feltéve A ”.

- ▶ A formula nem szimmetrikus, A és B szerepei különbözők.
Kell: $\mathbb{P}(A) > 0$. Nem kell: $\mathbb{P}(B) > 0$ (és ha $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B) = 0$, akkor $\mathbb{P}(B|A) = 0$ is teljesül).
- ▶ **Állítás:** Ha A, B események és $\mathbb{P}(A) > 0$, akkor A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
(Intuíció: A bekövetkezése nem befolyásolja B valószínűségét.)
- ▶ (2.2.2. Példa: kockadobás extra információval)

Feltételes valószínűség



$$P(A) = \frac{\text{red oval}}{\text{blue oval}}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{shaded intersection}}{\text{green oval}}$$

Feltételes valószínűség

(2.2.3. Állítás.) Minden $A \in \mathcal{F}$ -re, amelyre $\mathbb{P}(A) > 0$ teljesül, a

$$\mathbb{P}(\cdot | A): \mathcal{F} \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto \mathbb{P}(B | A)$$

függvény egy valószínűségi mérték.

- ▶ (Bizonyítás: előadáson)
- ▶ Miért hasznos ez? Mert minden korábbi állítás igaz $\mathbb{P}(\dots)$ helyett $\mathbb{P}(\dots | A)$ -val is.

Várható fennmaradó élettartam/halálozási valószínűség

8 National Vital Statistics Reports, Vol. 54, No. 14, April 19, 2006

Table 1. Life table for the total population: United States, 2003

[Click here for spreadsheet version](#)

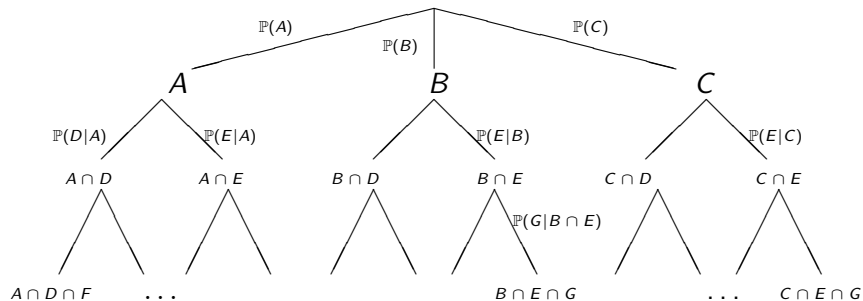
Age	Probability of dying between ages x to $x+1$	Number surviving to age x	Number dying between ages x to $x+1$	Person-years lived between ages x to $x+1$	Total number of person-years lived above age x	Expectation of life at age x
	$q(x)$	$l(x)$	$d(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$e(x)$
0-1	0.006865	100,000	687	99,394	7,743,016	77.4
1-2	0.000469	99,313	47	99,290	7,643,622	77.0
2-3	0.000337	99,267	33	99,250	7,544,332	76.0
3-4	0.000254	99,233	25	99,221	7,445,082	75.0
4-5	0.000194	99,208	19	99,199	7,345,861	74.0
5-6	0.000177	99,189	18	99,180	7,246,663	73.1
6-7	0.000160	99,171	16	99,163	7,147,482	72.1
7-8	0.000147	99,156	15	99,148	7,048,319	71.1
8-9	0.000132	99,141	13	99,134	6,949,171	70.1
9-10	0.000117	99,128	12	99,122	6,850,036	69.1
10-11	0.000109	99,116	11	99,111	6,750,914	68.1
11-12	0.000118	99,105	12	99,100	6,651,803	67.1
12-13	0.000157	99,094	16	99,086	6,552,704	66.1
13-14	0.000233	99,078	23	99,067	6,453,618	65.1
14-15	0.000339	99,055	34	99,038	6,354,551	64.2
15-16	0.000460	99,022	46	98,999	6,255,513	63.2
16-17	0.000577	98,976	57	98,947	6,156,514	62.2
17-18	0.000684	98,919	68	98,885	6,057,566	61.2
18-19	0.000769	98,851	76	98,813	5,958,681	60.3
19-20	0.000832	98,775	82	98,734	5,859,868	59.3

Többlépcsős kísérletek

Több lépésben futtatott véletlen kísérleteket fa alakban is ábrázolhatunk:

- ▶ **A fa csúcsai:** Az adott lépcsőfok eredményei
- ▶ **A fa élei:** az adott kimenet **feltételes valószínűségei**, feltéve az előző lépcsőfok eredményét
- ▶ **A fa levelei:** A kísérlet végeredményei a köztes eredményeknek megfelelően

Többlépcsős kísérletek: ábrázolás fa alakban



Többlépcsős kísérletek: szorzási szabály

A feltételes valószínűség definícióját átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A),$$

ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathbb{P}(A) > 0$. Ebből következik:

Szorzási szabály: Egy többlépcsős kísérletben egy kimenetel valószínűségét azon út élei menti (feltételes) valószínűségek szorzata adja, amely az ezen eredményt tartalmazó levélhez vezet.

► (2.2.7. Példa: háromszori kártyahúzás)

► Formálisabban kimondva:

(2.2.8. Állítás [Szorzási szabály].) Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(A_i) > 0 \ \forall i$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k).$$

► A bizonyításhoz elég kibontani a feltételes valószínűség definícióját és egyszerűsíteni a szorzatot.

Többlépcsős kísérletek: szorzási szabály

A feltételes valószínűség definícióját átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A),$$

ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathbb{P}(A) > 0$. Ebből következik:

Szorzási szabály: Egy többlépcsős kísérletben egy kimenetel valószínűségét azon út élei menti (feltételes) valószínűségek szorzata adja, amely az ezen eredményt tartalmazó levélhez vezet.

► (2.2.7. Példa: háromszori kártyahúzás)

► Formálisabban kimondva:

(2.2.8. Állítás [Szorzási szabály].) Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(A_i) > 0 \ \forall i$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k).$$

► A bizonyításhoz elég kibontani a feltételes valószínűség definícióját és egyszerűsíteni a szorzatot.

Teljes valószínűség tétele

(2.2.5. Definíció.) Egy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ eseménysorozatot **teljes eseményrendszer**nek hívunk, ha

- ▶ az események páronként kizáróak (vagyis $\forall i, j \in [n], i \neq j$: $A_i \cap A_j = \emptyset$)
- ▶ és $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

(2.2.4. Állítás [Teljes valószínűség tétele, TVT]) Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, akkor bármely B eseményre

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Teljes valószínűség tétele

(2.2.4. Állítás [Teljes valószínűség tétele, TVT]) Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, akkor bármely B eseményre

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Megjegyzések:

- ▶ A halmazelméletben (a valószínűségszámítási alkalmazástól elvonatkoztatva) a 2.2.5. Definíció feltételeinek teljesülése esetén azt mondjuk, hogy $A_1, \dots, A_n$ az Ω egy **partíciója**.
- ▶ A TVT igaz akkor is, ha $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$ helyett csak $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ teljesül, illetve $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ helyett csak $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1$. Később látni fogjuk, hogy ezek a feltételek nem egészen ekvivalensek.
- ▶ A TVT igaz megszámlálhatóan végtelen sok eseményre is (vagyis $A_1, \dots, A_n$ helyett egy $A_1, A_2, \dots$ sorozatra). Fontos: $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re teljesüljön.

Többlépcsős kísérletek: összeadási szabály

Másképp megfogalmazva a teljes valószínűség tételét:

Összeadási szabály: Egy többlépcsős kísérletben egy esemény valószínűségét azon kimeneteknek a leveleknél (a szorzási szabállyal) megkapható valószínűségeit összeadva kapjuk, amelyek az eseményhez tartoznak.

Teljes valószínűség tétele

(2.2.4. Állítás [Teljes valószínűség tétele, TVT]) Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszer és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, akkor bármely B eseményre

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

- ▶ (Bizonyítás)
- ▶ (2.2.6. Példa: Monty Hall-paradoxon)

Bayes-tétel

Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B | A)$ -t könnyen ki tudjuk számolni, de valójában $\mathbb{P}(A | B)$ -ra vagyunk kíváncsiak.

(Példa a jegyzetből: Bayes-paradoxon/röntgenvizsgálat)

(2.4.1. Állítás [Egyszerű Bayes-tétel].) Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(A) > 0$ és $\mathbb{P}(B) > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})}.$$

(Bizonyítás: a definíciók behelyettesítésével rögtön következik)

A TVT-vel kombinálva kapjuk a Bayes-tétel általános alakját.

(2.4.2. Állítás [Bayes-tétel].) Legyenek $B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(B) > 0$ és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, továbbá $A_1, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

- ▶ (Bizonyítás)
- ▶ (2.4.3. Példa: röntgenvizsgálat)
- ▶ (Ha marad idő: összefoglaló 3.4. feladat)

Bayes-tétel

Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B | A)$ -t könnyen ki tudjuk számolni, de valójában $\mathbb{P}(A | B)$ -ra vagyunk kíváncsiak.

(Példa a jegyzetből: Bayes-paradoxon/röntgenvizsgálat)

(2.4.1. Állítás [Egyszerű Bayes-tétel].) Legyenek $A, B \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(A) > 0$ és $\mathbb{P}(B) > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})}.$$

(Bizonyítás: a definíciók behelyettesítésével rögtön következik)

A TVT-vel kombinálva kapjuk a Bayes-tétel általános alakját.

(2.4.2. Állítás [Bayes-tétel].) Legyenek $B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, amelyekre $\mathbb{P}(B) > 0$ és $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i -re, továbbá $A_1, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

- ▶ (Bizonyítás)
- ▶ (2.4.3. Példa: röntgenvizsgálat)
- ▶ (Ha marad idő: összefoglaló 3.4. feladat)

Karger algoritmus (kiegészítő anyag)

Tekintsünk egy $G = (V, E)$ irányítatlan, nem feltétlenül egyszerű gráfot, ahol többszörös élek megengedettek, hurokélek nem.

G egy **vágása** egy $V = A \cup B$ **felbontás**, ahol A és B **diszjunktak**. A vágás **minimális**, ha A és B között a lehető legkevesebb él fut.

Rögzített $s, t \in V$ esetén s -ből t -be a Ford–Fulkerson-algoritmussal megkaphatjuk a minimális vágást $\rightarrow$ lásd folyamatok.

Most: **globális** minimális vágást keresünk s és t rögzítése nélkül.

Alkalmazások: hálózatok stabilitásának elemzése, klaszterelemzés...

Karger algoritmus (avagy a randomizált MinCut algoritmus) egy véletlent használó algoritmus.

- ▶ Inputja: egy $G = (V, E)$ irányítatlan (multi)gráf. (Pl. mátrixszal megadva, az i -edik sor és a j -edik oszlop kereszteződésénél az i -edik és j -edik csúcsok közötti élek száma szerepel.)
- ▶ Outputja: az élek egy részhalmaza (szerencsés esetben egy globális minimális vágás).

Karger algoritmus

Algoritmus:

1. Válasszunk véletlenszerűen egy élet az összes meglévő él közül.
2. Húzzuk össze az él két végpontját egy új **csúccsá** és távolítsuk el az éleket ezen két csúcs között. (A két régi csúcs szomszédai a kapott új csúcs szomszédai lesznek.)
3. Ismételjük az 1. és 2. lépéseket egészen addig, amíg csak két csúcs marad (vagyis $n - 2$ -szer).

A kapott két csúcs mindenképpen egy vágást határoz meg (A a végső gráf első csúcsába olvasztott eredeti csúcsok halmaza, B a végső gráf második csúcsába olvasztottaké), de nem biztos, hogy ez a vágás minimális.

Karger algoritmus: siker valószínűsége

(2.3.1. Állítás.) A Karger-algoritmus egyszeri futtatása esetén legalább $\frac{2}{n^2}$ eséllyel globális minimális vágást kapunk.

(Bizonyítás)

Futtassuk le $\frac{1}{2}n^2$ -szer az algoritmust. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egyszer sem találtunk minimális vágást, az egyes kísérletek függetlenség miatt

$$\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} < \frac{1}{e}.$$

Vagyis kb. 0,6321 valószínűséggel találunk minimális vágást.

Ha pedig az ismétlések száma n^2 -nél gyorsabban nő, amint $n \rightarrow \infty$ (pl. $n^2 \ln n$ az ismétlések száma), akkor 1-hez tartó valószínűséggel találunk.

Monte Carlo- és Las Vegas-algoritmus

A véletlent használó algoritmusok két nagy csoportja:

- ▶ **Monte Carlo-algoritmus:** A lépésszám rögzített, nem függ a véletlentől, de az algoritmus bizonyos pozitív valószínűséggel hibás eredményt ad.
Példa: Fermat-prímteszt, RSA és variánsaik. Ilyen a Karger-algoritmus is.
- ▶ **Las Vegas-algoritmus:** Az algoritmus mindig helyes eredményt ad, de a lépésszám véletlen, és előfordulhat, hogy „átlagos esetben” lényegesen jobb, mint a legrosszabb esetben.
Példa: randomized QuickSort (lásd később).