

Valószínűségszámítás és statisztika

Tóbiás András
BME VIK SZIT

2024/25. őszi félév

Adminisztratív és technikai tudnivalók

Elérhetőségeim

- ▶ Tanszék: SZIT (tanszéki adminisztráció: a BSz-hez és Algelhez hasonlóan)
- ▶ Szoba: IE.2.17.2
- ▶ Email: tobiasandrasj_KUKAC_gmail.com
- ▶ Honlap: cs.bme.hu/_HULLÁMVONAL_tobias
- ▶ Fogadóóra: szükség szerint → egyeztessünk emailben időpontot

A tárgy adatai

- ▶ A tárgy neve: Valószínűségszámítás és statisztika
- ▶ A 2023. vagy 2022. szeptemberben kezdett mérnökinformatikus BSc hallgatók kötelező tárgya
- ▶ Kódja: VISZAB04, 6 kredites, vizsgás tárgy
- ▶ Heti 4 óra előadás, heti 2 óra gyakorlat, Neptun szerint
- ▶ Tárgyhonlap: `cs.bme.hu/valszam` = `cs.bme.hu/valszamuj`
- ▶ 1 zh: október 22. (8. hét kedd) 8-10, pótzh: november 5. (10. hét kedd) 8-10, pótpótzh: december 9. (póthét hétfő)???
Szintfelmérők/kis zh-k a tavalyi évvel ellentétben nem lesznek
- ▶ Írásbeli vizsga → sikeres írásbeli esetén szóbeli vizsgával lehet egy jegyet javítani vagy rontani (vagy a jegy nem változik)
- ▶ IMSc pontozás: lásd később

Az előadások anyaga, segédanyagok

- ▶ Kb. 1–9./10. hét: valószínűesszámitás (a régi Valszám anyaga + az elején kombinatorika → régen a BSz2 része volt)
- ▶ Kb. 10./11.–14. hét: bevezető statisztika (új anyagrész, a tárgy egyes régebbi változataiban már szerepelt)

Jegyzetek, segédanyagok:

- ▶ A valószínűesszámitás anyagrészénél Mészáros Szabolcs 2021-es jegyzetét (→ tárgyhonlap) fogom követni, de nem egészen abban a sorrendben és felépítésben, mint az ottani.
- ▶ Ezért az áttekinthetőség és orientáció érdekében ehhez az anyagrészhez fogok **vázlatos** diásorokat készíteni.
- ▶ Definíciók, tételek, ábrák, táblázatok → a diásorokon, bizonyítások, bizonyos példák, feladatok → a táblánál.
- ▶ A következő kisebb anyagrészek nem szerepelnek Mészáros Szabolcs jegyzetében (de a diáson igen + bizonyítások a táblánál): kombinatorika, nemnegatív valószínűségi változók várható értéke, valószínűségi változók szimulációja.
- ▶ A statisztika anyagrészt a Mészáros Szabolcs jegyzetéhez általam írt kiegészítés (→ tárgyhonlap) alapján mondom el; de itt is lesz diáor.

Az előadások anyaga, segédanyagok

- ▶ Kb. 1–9./10. hét: valószínűségszámítás (a régi Valszám anyaga + az elején kombinatorika → régen a BSz2 része volt)
- ▶ Kb. 10./11.–14. hét: bevezető statisztika (új anyagrész, a tárgy egyes régebbi változataiban már szerepelt)

Jegyzetek, segédanyagok:

- ▶ A valószínűségszámítás anyagrészénél Mészáros Szabolcs 2021-es jegyzetét (→ tárgyhonlap) fogom követni, de nem egészen abban a sorrendben és felépítésben, mint az ottani.
- ▶ Ezért az áttekinthetőség és orientáció érdekében ehhez az anyagrészhez fogok **vázlatos** diásorokat készíteni.
- ▶ Definíciók, tételek, ábrák, táblázatok → a diásorokon, bizonyítások, bizonyos példák, feladatok → a táblánál.
- ▶ A következő kisebb anyagrészek nem szerepelnek Mészáros Szabolcs jegyzetében (de a diáson igen + bizonyítások a táblánál): kombinatorika, nemnegatív valószínűségi változók várható értéke, valószínűségi változók szimulációja.
- ▶ A statisztika anyagrészt a Mészáros Szabolcs jegyzetéhez általam írt kiegészítés (→ tárgyhonlap) alapján mondom el, de itt is lesz diásor.

További jegyzetek (lásd tárgyhonlap)

- ▶ Vetier András - Valószínűségszámítás I-IV.
- ▶ Mitzenmacher, Upfal - Probability and Computing
- ▶ Noemi Kurt - Stochastik für Informatiker
- ▶ youtube (20 perces videók, nem a komplett előadások; 3Blue1Brown csatorna)

Az „össznépi gyakorlat”

A régi Valószínűségszámítás (VISZAB02) tárgyhoz képest

- ▶ a tárgy anyagmennyisége kb. a másfélszeresére nőtt,
- ▶ az előadások óraszámja a duplájára,
- ▶ a gyakorlatok mennyisége pedig sajnos nem változott.

Azaz az előadásokon marad némi „szabadidő”. Ennek felhasználása:

- ▶ kiegészítő anyagok (pl. informatikai/algorithmikus alkalmazások), interaktív oktatási formák (Google Forms stb.)
- ▶ a gyakorlatok leterheltségének enyhítése.

Az utóbbi azt fogja jelenteni, hogy a gyakorlati feladatsorról bizonyos feladatokat az előadáson fogunk megoldani („össznépi gyakorlat”).

Az össznépi feladatmegoldás nem különül el időben az előadás többi részétől, bármelyik alkalommal lehet ilyen. De ahol a honlapon az ütemtervben (ami még valószínűleg módosulni fog) szerepel a „példák” vagy „feladatok” kifejezés, ott jó eséllyel lehet rá számítani.

IMSc-s szorgalmi feladatok

- ▶ A feladatsorokon 10 db **IMSc-s szorgalmi házi feladat**, amikkel 10–10 pontot lehet szerezni. Az összpontszámot 10-zel osztva adódik a feladatokból megszerzett IMSc-pontok száma.
- ▶ IMSc-s házi feladatot bárki beadhat, nemcsak az IMSc-s hallgatók.
- ▶ Az IMSc-s házi feladatait mindenkinek a (Neptun szerinti) gyakorlatvezetője javítja. A beadás módját (papír, email, Teams stb.) és pontos határidejét a gyakorlatvezetők egyénileg szabályozzák az alábbi elvek szerint:
 - ▶ a beadásra az adott gyakorlathoz képest mindig legalább kb. két hetet adunk,
 - ▶ késedelmes beadást a gyakorlatvezető csak akkor engedélyezhet, ha az adott feladatot még egy hallgató sem kapta vissza kijavítva,
 - ▶ a szorgalmi időszak vége után nincs sok idő késedelmes beadásra, mert az első vizsgáig minden feladatot ki kell javítani.

Néhány szó a gyakorlatokról

- ▶ A gyakorlatokon (a többi SZIT-es tárgyhoz hasonlóan) amellet, hogy a gyakorlatvezető bemutatja néhány feladat megoldását, fontos cél az **önálló feladatmegoldás** gyakorlása is
- ▶ Ennek segítésére lesznek (nem kötelező) házi feladatok is → megbeszélés a következő gyakorlaton igény és lehetőség szerint
- ▶ A gyakorlati feladatokhoz (az IMSc-s feladatok kivételével) a gyakorlatok lezajlása után **végeredményeket** teszünk közzé. Bizonyos feladatokhoz lesznek teljes megoldások is, de ezzel kapcsolatban előre nem ígérünk semmit.

Zh és vizsga

- ▶ Az aláírás megszerzésének feltétele, hogy a zh eredménye legalább 40%-os (40 pontos) legyen.
- ▶ Sikeres aláírás után az írásbeli vizsgán is 40% (40 pont) kell a tárgy sikeres teljesítéséhez.
- ▶ A zh-n és a vizsgán is 6 db 20 pontos feladat lesz. 100 pont számít 100%-nak, a 100 pont feletti rész fele IMSc pont.
- ▶ Az IMSc pontokat (házi+zh+vizsga) kerekítés nélkül összegezzük, majd az összeget lefelé kerekítjük.
- ▶ A tárgy sikeres teljesítése esetén a zh pontszáma (de maximum 100 pont)*0,4 + a vizsga pontszáma (de maximum 100 pont)*0,6 lesz a hallgató végső pontszáma.
- ▶ A jegyek ponthatárai a szokásosak (40,55,70,85%).
- ▶ Szóbelizéssel maximum egy jegyet lehet javítani vagy rontani. (A pontszám ezután nem fog változni, csak a jegy. Ebből következik, hogy szóbelivel IMSc-pontot szerezni sem lehet.)
- ▶ A pótzh-n pótolni és javítani is lehet, nem kell rá jelentkezni.
- ▶ A pótpótzh-ra a Neptunban kell jelentkezni, fizetni kell érte, és javítani már nem lehet.

Zh és vizsga szabályai

- ▶ A rendelkezésre álló munkaidő a zh-n 90, a vizsgán 100 perc.
- ▶ A vizsgán 1 feladat elmélet.
- ▶ Csak előre összetűzött lapokon lehet dolgozni, a piszkozatlapot is beleértve.
- ▶ Az első 30 percben kimenni, utána bejönni nem lehet.
- ▶ Az első oldal jobb felső sarkán szerepeljen: a hallgató neve, Neptun-kódja és a Neptun szerinti gyakorlatvezetője neve.
- ▶ A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítve várjuk.
- ▶ A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges. A lépéseknél a felhasznált tulajdonságok és tételek is jelzendők.
- ▶ Segédeszközként csak (grafikus megjelenítésre nem alkalmas) számológép, a hallgató saját tudása és az **általunk kiosztott** eloszlástáblázatok, illetve a vizsgán (ha van olyan feladat, amihez szükség van rájuk) az **általunk kiosztott** képletgyűjtemények és további táblázatok (lásd a jegyzetkiegészítés végén) használhatók.

A zh és vizsga anyaga a régi tárgyhöz képest

Zh:

- ▶ A tavalyi zh elérhető gyakorláshoz a tárgyhonlapon.
- ▶ Pár megjegyzés a tavalynál régebbi zh-kkal kapcsolatban:
 - ▶ A mostani zh anyaga nagyjából csak olyan anyagrészekből áll, amik a régi tárgy zh-iban vagy vizsgáiban is szerepeltek.
 - ▶ A megnövelt óraszám miatt az előadás a régi tárgynál gyorsabban halad → bizonyos anyagrészekhez nem a régi zh-kban, hanem a régi vizsgákban lehet feladatokat találni.
 - ▶ A kombinatorika hangsúlyosabb, mint a régi tárgyban.
- ▶ A zh anyagát a zh előtt 1–2 héttel pontosítjuk.
- ▶ Régi zh- és vizsgafeladatsorok a régi tárgyhonlapokon (link a mostani tárgyhonlapon). Új minta zh nem lesz, lesz viszont egy gyakorló feladatsor a zh előtt → konzultációk.

Vizsga:

- ▶ Tavaly óta a vizsgákban vannak statisztika feladatok is → a honlapon elérhető egy tavalyi vizsga + statisztika témájú mintafeladatok a vizsgához.

További gondolatok, visszacsatolás

A tárgy jelen változatában tavaly indult először.

Az előadás tartásának módjával (diasor/tábla stb.), a gyakorlati feladatsorokkal és az új formátumokkal (össznépi gyakorlat, kiegészítő anyagok, interaktív tevékenységek stb.) kapcsolatban minden visszajelzésnek örülök! Akár az OHV-ban, akár már korábban is.

Ami a tantárgyi adatlapon szerepel, azon félév közben már nem tudunk változtatni (pl. az anyag nagy részén vagy a számonkérések módján).

Pedagógiai szempontból az „össznépi gyakorlat” helyett persze jobb lenne egy második „rendes” gyakorlat, de ehhez több oktató és több anyagi erőforrás kellene. Így mindenkinek javaslom mind az előadás, mind a gyakorlat látogatását, annak érdekében, hogy lépést tudjon tartani az anyaggal.

Bevezető 1.

Mi a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika?

Az első két diászor jelentős mértékben tartalmaz Noemi Kurt (TU Berlin) diászorából, az első diászor Pintér Márta tavalyi előadásából is anyagokat.

Sztochasztika = a véletlen törvényszerűségének tudománya.

A **sztochasztika** két fő ága:

- ▶ **Valószínűségelmélet**: matematikai modellezés és formalizmus, elméleti alapok
- ▶ **Statisztika**: véletlen eljárásokból származó minták/mérési adatok elemzése és interpretációja valószínűségelméleti módszerek segítségével
 - ▶ mi itt csak a **matematikai** statisztikával foglalkozunk, vagyis már meglévő mérési adatok elemzésével.
Nem vizsgáljuk, hogy hogyan kell pl. műszaki területen helyesen mérni (→ mérnöki tudományok) vagy a társadalom vizsgálata esetén reprezentatív mintát venni (→ társadalomtudományok).

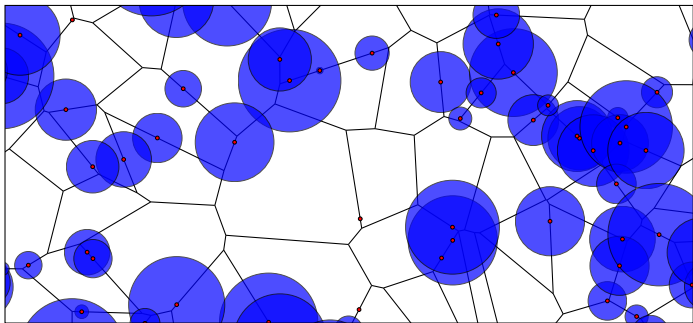
Szorosan kapcsolódó tudományágak például:

- ▶ véletlen gráfok és hálózatok, véletlen algoritmusok
- ▶ neurális hálók, mesterséges intelligencia
- ▶ biztosításmatematika, pénzügyi matematika
- ▶ statisztikus fizika
- ▶ kvantumfizika, kvantumalgoritmusok
- ▶ információelmélet

Véletlen: “igazi” véletlen (érmedobás, kockadobás stb.), vagy információhiány, vagy sok kis esemény együttes hatása, amelyeket nem lehet egyesével pontosan kontrollálni, és ezért azt tesszük fel róluk, hogy véletlenek.

Példák véletlen lefolyású folyamatokra:

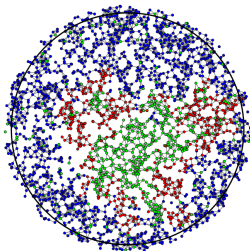
- ▶ Kockadobás, lottóhúzás
- ▶ Villanykörte élettartama
- ▶ Hálózatok kialakulása, pl. a közösségi médiában
- ▶ Üzenettovábbítás telekommunikációs hálózatokban



Véletlen: “igazi” véletlen (érmedobás, kockadobás stb.), vagy információhiány, vagy sok kis esemény együttes hatása, amelyeket nem lehet egyesével pontosan kontrollálni, és ezért azt tesszük fel róluk, hogy véletlenek.

Példák véletlen lefolyású folyamatokra:

- ▶ Kockadobás, lottóhúzás
- ▶ Villanykörte élettartama
- ▶ Hálózatok kialakulása, pl. a közösségi médiában
- ▶ Üzenet továbbítás telekommunikációs hálózatokban
- ▶ Járványok terjedése (ideértve a malware-ek terjedését is), vírusok mutációja és a mutációk elterjedése



Véletlen: “igazi” véletlen (érmedobás, kockadobás stb.), vagy információhiány, vagy sok kis esemény együttes hatása, amelyeket nem lehet egyesével pontosan kontrollálni, és ezért azt tesszük fel róluk, hogy véletlenek.

Példák véletlen lefolyású folyamatokra:

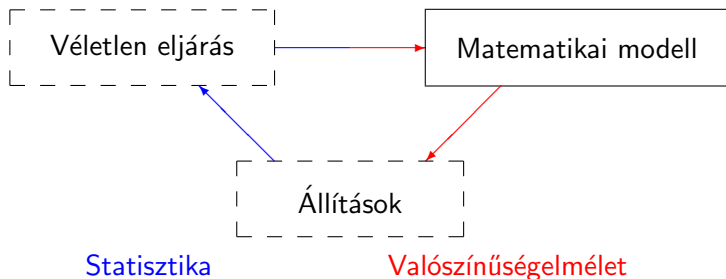
- ▶ Kockadobás, lottóhúzás
- ▶ Villanykörte élettartama
- ▶ Hálózatok kialakulása, pl. a közösségi médiában
- ▶ Üzenet továbbítás telekommunikációs hálózatokban
- ▶ Járványok terjedése (ideértve a malware-ek terjedését is), vírusok mutációja és a mutációk elterjedése
- ▶ Sorbanállási modellek, pl. a közlekedés modellezésében
- ▶ Véletlen algoritmusok, pl. a Fermat-prímteszt/RSA (lásd BSz1), gyorsrendezés (lásd Alg1) véletlen particionáló elemekkel, vagy a Google PageRank algoritmus
- ▶ Daganatok kialakulása egy páciens szervezetében

A tárgy célja: A matematikai alapok elsajátítása, amelyekre a felsorolt és más alkalmazások épülnek.

Az előadás tartalma és felépítése:

- ▶ Matematikai alapfogalmak: valószínűségek, események, valószínűségi változók, függetlenség stb.
- ▶ Valószínűségi változók mérőszámai (pl. várható érték, szórás, korreláció) és kiszámításuk
- ▶ Fontos példák és előfordulásuk → pl. melyik nevezetes valószínűségi eloszlás mit modellez?
- ▶ A statisztika módszereinek alapjai (pl. maximum likelihood becslés, statisztikai próbák)
- ▶ Példák véletlent használó algoritmusokra, egyéb informatikai alkalmazásokra

Sztochasztika



Valószínűségelmélet:

Idealizálás és formalizálás $\Rightarrow$ **univerzálisan felhasználható**

Egy elmélet, sok felhasználási területtel

Modellezés gyakorlása $\rightarrow$ **szöveges feladatok**

„A valszám az életről szól.” (Balázs Márton)

Statisztika:

Sokfajta módszer, módszerválasztás a konkrét felhasználásnak megfelelően

Kitekintés: a Valszámra épülő mérnökinfó MSc-s tárgyak

- ▶ Matematikai statisztika (SZIT tartja)
(becsléelmélet, konfidenciaintervallumok, statisztikai próbák, regresszió)

A tárgy módszereibe a Valszám utolsó 4-5 hetében betekintést adunk. Részletesebb alkalmazások és [laborgyakorlatok R-ben](#) a statisztika tárgyból lesznek.

- ▶ Sztochasztika (TTK MI Sztochasztika Tanszék tartja)
(véletlen algoritmusok és kapcsolódó bonyolultságelméleti osztályok, véletlen gráfok és hálózatok, nagy valszámtételek, időben lezajló véletlen folyamatok, Markov-láncok)
- ▶ Információelmélet (SZIT tartja)
(Huffman-kód, entrópia, információforrás, Markov-láncok, kvantálás, csatornakódolás, csatorna kapacitása)
- ▶ Tömegkiszolgálás (régi változat → SZIT, új → TMIT)
(sorbanállási modellek, Markov-láncok, születési–halálozási folyamatok, pontfolyamatok, Poisson-folyamat, véletlen hozzáférési algoritmusok a mobil távközlésben)

Az előtanulmányi követelményekről – öszintén

- ▶ A véletlen mennyiségek egy jelentős része **folytonos** → elkerülhetetlen az analízis eszköztárának használata.
- ▶ A zh-ig főleg egyszerű egyváltozós függvények (polinomok, exponenciális függvények stb.) deriválására–integrálására lesz szükségünk, kb. a 4–5. héttől kezdve.
- ▶ A Valszám felvételének hivatalosan csak az Analízis 1 a követelménye, de szükségünk lesz olyan, az Analízis 2-ből ismert eszközökre is, mint a parciális deriváltak és az integrálás két változóban (normál tartományon, néha polárkoordinátákra áttérve), kb. a 7–8. héttől kezdve.
- ▶ A valószínűségelmélet legtöbb alapfogalmát először a diszkrét esetben fogjuk bemutatni, azt remélve, hogy ez segít a folytonos eset megértésében is.
- ▶ A korábbi SZIT-es tárgyakból a lineáris algebrára fogunk leggyakrabban visszautalni, néha a gráf- és algoritmuselméletre is.

Egy megjegyzés a mértékelmélet szerepéről

A modern valószínűségelmélet a **mértékelméletre** épül, ami a hosszúság, terület, térfogat és integrál fogalmai általánosításának és egységesítésének a 20. század elején keletkezett elmélete.

A mérnökinformatikus-alapképzésben nincs mértékelméleti tárgy, így a Valszám sem használ sok mértékelméletet, bár pár alapfogalmat (pl. σ -algebra) be fogunk vezetni.

A mértékelmélet hiánya remélhetőleg nem fog érdemi zavart okozni a Valszám anyagának elsajátításában.

Viszont azt maga után vonja, hogy nem fogunk tudni mindent olyan pontosan bizonyítani, mint például BSz-ből.

Egyes bizonyítások vázlatosak lesznek vagy csak speciális esetekre vonatkoznak, más bizonyításokat teljesen elhagyunk.

A hiányzó bizonyításokkal kapcsolatos kérdésekre szívesen válaszolok az órák után. Az ilyen kérdések iránt érdeklődőknek ajánlom a TTK-s hallgatóknak szóló mértékelméleti és sztochasztikai tárgyakat is.

Most következik az alkalmazási területek osztályozása és a történeti áttekintés, amihez áttérünk Pintér Márta tanárnő tavalyi diáorára (ezt nem fogom közzétenni). Utána visszatérünk ide.

Bevezető 2: A valószínűségszámítás alapfogalmai

Véletlen

Véletlenszerű:

nem azt jelenti, hogy nincs oka annak, ami végbemegy, hanem pl. az okok egy része számunkra ismeretlen

minden körülmény adott $\Rightarrow$ egyértelmű lefolyás
csak egy részét vesszük figyelembe $\Rightarrow$ nem egyértelmű $\Rightarrow$ véletlenszerű

Példa: pénzérme feldobása

Véletlen kísérlet: olyan jelenség/kísérlet,

- ▶ aminek a kimenetelét az általunk figyelembe vett feltételek nem határozzák meg egyértelműen
- ▶ aminek eredménye előre nem mondható meg, csak a lehetséges kimenetek halmaza

Véletlen

Véletlenszerű:

nem azt jelenti, hogy nincs oka annak, ami végbemegy, hanem pl. az okok egy része számunkra ismeretlen

minden körülmény adott $\Rightarrow$ egyértelmű lefolyás
csak egy részét vesszük figyelembe $\Rightarrow$ nem egyértelmű $\Rightarrow$ véletlenszerű

Példa: pénzérme feldobása

Véletlen kísérlet: olyan jelenség/kísérlet,

- ▶ aminek a kimenetelét az általunk figyelembe vett feltételek nem határozzák meg egyértelműen
- ▶ aminek eredménye előre nem mondható meg, csak a lehetséges kimenetek halmaza

Alapfogalmak, jelölések

- ▶ Ω **eseménytér**: lehetséges kimenetek halmaza (nem üres)
- ▶ $\omega \in \Omega$ **kimenetel**: az eseménytér elemei. Az $\{\omega\}$ egyelemű halmazt **elemi esemény**nek nevezzük.
- ▶ $A \subseteq \Omega$ **események**: az eseménytér bizonyos részhalmazai.

Egy esemény **bekövetkezik**: olyan elemi esemény realizálódik a kísérlet végrehajtásakor, ami eleme.

Az eseményt megadhatjuk az elemi megadásával, de logikai kifejezéssel is.

Példa: kockadobás – “párosat dobunk”, focimeccs – “győz a Hertha BSC”

elemi esemény is esemény – egyelemű halmaz

összetett esemény – legalább kételemű halmaz

Ha Ω véges halmaz, a legtöbb példában Ω minden részhalmazát eseménynek fogjuk tekinteni.

Összetettebb eseménytereknél (pl. $\Omega = \mathbb{R}$) a helyzet bonyolultabb
→ lásd hamarosan.

Alapfogalmak, jelölések

- ▶ Ω **eseménytér**: lehetséges kimenetek halmaza (nem üres)
- ▶ $\omega \in \Omega$ **kimenetel**: az eseménytér elemei. Az $\{\omega\}$ egyelemű halmazt **elemi esemény**nek nevezzük.
- ▶ $A \subseteq \Omega$ **események**: az eseménytér bizonyos részhalmazai.

Egy esemény **bekövetkezik**: olyan elemi esemény realizálódik a kísérlet végrehajtásakor, ami eleme.

Az eseményt megadhatjuk az elemi megadásával, de logikai kifejezéssel is.

Példa: kockadobás – “párosat dobunk”, focimeccs – “győz a Hertha BSC”

elemi esemény is esemény – egyelemű halmaz

összetett esemény – legalább kételemű halmaz

Ha Ω véges halmaz, a legtöbb példában Ω minden részhalmazát eseménynek fogjuk tekinteni.

Összetettebb eseménytereknél (pl. $\Omega = \mathbb{R}$) a helyzet bonyolultabb
→ lásd hamarosan.

Műveletek eseményekkel (halmazműveletek)

események = halmazok $\Rightarrow$ műveletek $\Rightarrow$ halmazműveletek

Legyenek A és B események. Ekkor

- ▶ $A \cup B$ unió: akkor következik be, ha legalább az egyik
($A \cup B$ bekövetkezik $\Leftrightarrow A$ vagy B bekövetkezik)



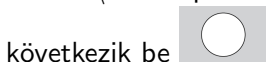
- ▶ $A \cap B$ metszet: akkor következik be, ha mindkettő
($A \cap B$ bekövetkezik $\Leftrightarrow A$ és B is bekövetkezik)



- ▶ $A \setminus B$ különbség: akkor következik be, ha A bekövetkezik, de



- ▶ $\bar{A} = \Omega \setminus A$ komplementer: akkor következik be, ha A nem



- ▶ Ω biztos esemény



- ▶ $\emptyset$ lehetetlen esemény



A műveletek tulajdonságai

- ▶ $\overline{\overline{A}} = A$
- ▶ $A \cap A = A \cup A = A$
- ▶ $A \cap \Omega = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
- ▶ $A \cup \Omega = \Omega, A \cup \emptyset = A$
- ▶ a metszet kommutatív: $A \cap B = B \cap A$ és asszociatív:
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Ezek jelölése: $A \cap B \cap C$
- ▶ hasonlóan az unió is kommutatív és asszociatív
- ▶ a metszet disztributív az unióra nézve:
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ▶ fordítva is igaz: az unió disztributív a metszetre nézve

De Morgan-azonosságok

- ▶ Két eseményre: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- ▶ Események egy végtelen sorozatára is igaz: $\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$
és $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

Műveletek eseményekkel, példa

Legyen A, B, C három esemény. Fejezzük ki az alábbi eseményeket:

- ▶ legalább egy esemény teljesül
- ▶ A és B teljesül, de C nem
- ▶ minden esemény teljesül
- ▶ egyik esemény sem teljesül
- ▶ pontosan egy esemény teljesül

Műveletek eseményekkel, példa

Legyen A, B, C három esemény. Fejezzük ki az alábbi eseményeket:

- ▶ legalább egy esemény teljesül: $A \cup B \cup C$
- ▶ A és B teljesül, de C nem: $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \cap \overline{C}$
- ▶ minden esemény teljesül: $A \cap B \cap C$
- ▶ egyik esemény sem teljesül: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$
- ▶ pontosan egy esemény teljesül:
 $A \cup B \cup C \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$

További műveletek eseményekkel

- ▶ $A \subseteq B$ részhalmaz: A -ból következik B , A maga után vonja B -t
- ▶ $A \cap B = \emptyset$: A és B **kizáróak**, nem következhetnek be egyszerre
- ▶ Legyen $A_1, A_2, \dots$ események egy sorozata. $A_1, A_2, \dots$ **páronként kizáróak**, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén.
(Véges sok esemény esetén ugyanígy definiáljuk a páronkénti kizáróságot.)

Azt mondtuk, hogy az események Ω bizonyos részhalmazai lesznek.

Cél: az esemény fogalmát úgy definiálni, hogy ha az eddig felsorolt műveleteket eseményekre alkalmazzuk, akkor eseményeket kapjunk. Ezt a célt szolgálja az **eseményalgebra** (σ -algebra) fogalma.

Eseményalgebra

Legyen $\Omega \neq \emptyset$ rögzített halmaz.

Jelölje $\mathcal{P}(\Omega)$ az Ω összes részhalmazainak halmaza. (Ezt az Ω **hatványhalmazának** nevezzük, $\mathcal{P}$ =power set.)

(1.2.2. Definíció.) Az Ω részhalmazainak egy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ családját **σ -algebrának** nevezzük az Ω alaphalmazon (vagy: Ω felett, az Ω alaphalmaz felett) ha

- ▶ $\Omega \in \mathcal{F}$,
- ▶ $\forall A \subseteq \Omega: A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$,
- ▶ és $\forall A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega: A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Példák:

- ▶ maga a hatványhalmaz, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- ▶ és a *triviális σ -algebra*, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

minden $\Omega \neq \emptyset$ esetén σ -algebra.

Ha Ω véges, akkor $\mathcal{P}(\Omega)$ gyakran jó választás lesz a valóság modellezéséhez.

Eseményalgebra tulajdonságai

Legyen $\mathcal{F}$ egy σ -algebra. Ekkor: $\forall A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Igaz-e, hogy $\mathcal{F}$ zárt a véges unióra is, azaz ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, akkor $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$?

Igen: legyen $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$. Láttuk: $\emptyset \in \mathcal{F}$. Tehát

$$\mathcal{F} \ni \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

$n = 2$ esetén: ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Eseményalgebra tulajdonságai

Legyen $\mathcal{F}$ egy σ -algebra. Ekkor: $\forall A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Igaz-e, hogy $\mathcal{F}$ zárt a véges unióra is, azaz ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, akkor $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$?

Igen: legyen $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$. Láttuk: $\emptyset \in \mathcal{F}$. Tehát

$$\mathcal{F} \ni \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

$n = 2$ esetén: ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Eseményalgebra tulajdonságai

(1.2.3. Állítás egy része.) Legyen $\mathcal{F}$ egy σ -algebra az Ω alaphalmazon. Ekkor

- ▶ $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- ▶ $\forall A, B \subseteq \Omega: A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$,
- ▶ és $\forall A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega: A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

(Bizonyítás)

Az előzőekhez hasonlóan: ha $A, B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{F}$. Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, akkor $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

A σ -algebra megválasztásáról röviden

Ha Ω véges, akkor $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gyakran jó választás lesz a valóság modellezéséhez.

A σ -algebra megválasztásánál szerepet játszó tényezők:

- ▶ **geometriai valószínűségi mező** (lásd hamarosan): Ω az $\mathbb{R}^2$ sík egy „szép” részhalmaza, pl. egy téglalap vagy körlap, és a valószínűség a területtel arányos. Azonban a terület fogalmát ismert mértékelméleti eredmények szerint nem lehet $\mathbb{R}^2$ minden részhalmazára kiterjeszteni
- ▶ a **megfigyelhetőségen** is múlik, hogy mit tekintünk eseménynek (össznépi gyakorlat: 1.2. feladat)
- ▶ véletlen **folyamatok** esetén az idő múlásával is változik, hogy mit lehet megfigyelni és mit tekinthetünk eseménynek (pl. egy részvény árfolyamának megfigyelésénél)

Valószínűségi mező

(1.3.1. Definíció.) Legyen $\mathcal{F}$ egy σ -algebra az Ω tetszőleges halmazon. Ekkor egy $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ függvényt **valószínűségi mérték**nek nevezünk, ha

- ▶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- ▶ és ha $A_1, A_2, \dots$ olyan eseménysorozat, amire minden $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

(1.3.2. Definíció.) Az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hármast **valószínűségi mező**nek nevezzük, ha $\Omega \neq \emptyset$ egy halmaz, $\mathcal{F}$ egy σ -algebra az Ω alaphalmazon és $\mathbb{P}$ valószínűségi mérték ($\mathcal{F}$ -en).

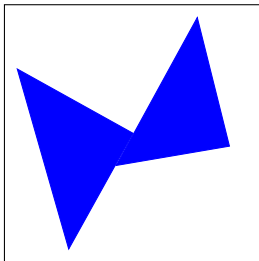
1.3.5. Állítás: Ha $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{F}$ -re $A \cap B = \emptyset$, akkor $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. (Bizonyítás)

Következmény: minden $A \in \mathcal{F}$ eseményre $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(1.3.3. Példa: kockadobás

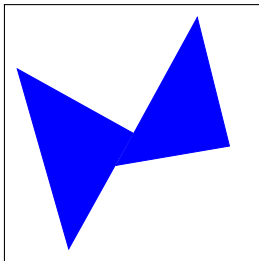
Klasszikus valószínűségi mező: Ω véges halmaz, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,
 $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \frac{\text{"kedvező esetek száma"}}{\text{összes eset száma}}, \forall A \subseteq \Omega$

Geometriai valószínűségi mező



„Találomra” (avagy “teljesen véletlenszerűen”, avagy “egyenletes eloszlás szerint” – lásd később) választunk egy pontot a fehér négyzeten. Mennyi a valószínűsége, hogy a kék tartományba esik?

Geometriai valószínűségi mező



Geometriai valószínűségi mező esetén Ω az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza (itt a fehér négyzet), a valószínűség pedig a területtel arányos:

$\mathbb{P}(\Omega\text{-n véletlenszerűen választott pont a kék tartományba esik})$

$$= \frac{T_{\text{kévező}}}{T_{\text{összes}}} = \frac{T_{\text{kék tartomány}}}{T_{\Omega}}.$$

$$\mathbb{P}(\text{a választott pont } \Omega\text{-ba esik}) = \frac{T_{\Omega}}{T_{\Omega}} = 1.$$

A fenti képlet a kék tartomány helyett igaz bármilyen Jordan-mérhető tartományra (pl.: sokszögek, körök és egyéb kúpszeletek, és ezek véges metszetei/uniói/különbségei).

Szintén igaz a képlet a sík véges vagy megszámlálhatóan végtelen részhalmazaira. Ezek területe 0.

Geometriai valószínűségi mező

- ▶ **Kérdés:** mi egy jó σ -algebra, ha $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ vagy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$?
- ▶ **Kapcsolódó kérdés:** milyen részhalmazokra terjeszthető ki $\mathbb{R}$ -ben az intervallumhosszúság, $\mathbb{R}^2$ -ben a terület fogalma?
- ▶ 20. század eleji **eredmény:** $\mathbb{R}$ -nek vannak olyan részhalmazai, amelyek hosszúsága/területe nem definiálható ellentmondás nélkül $\rightarrow$ lásd pl. **Vitali-halmaz**.
- ▶ A Vitali-halmaz létezése következik az ún. *kiválasztási axiómából*, ami az analízisben igen fontos alapfeltevés.
- ▶ Így például a $\Omega = [0, 1]$ intervallum esetén $\mathcal{F} = \mathcal{P}([0, 1])$ nem lesz megfelelő σ -algebra, ha azt akarjuk, hogy $\mathbb{P}$ a szokásos intervallumhosszúságnak feleljen meg.
- ▶ Hasonló a helyzet, ha Ω az $\mathbb{R}^2$ sík egy „szép” részhalmaza és geometriai valószínűségi mezőt akarunk.
De vannak megfelelő σ -algebrák, amelyek a fent említett Jordan-mérhető tartományokat (sokszögeket, köröket stb.) tartalmazzák. Lásd: **Borel- σ -algebra**, **Lebesgue- σ -algebra**.
- ▶ Ezen σ -algebrák konstrukciójával ebből a tárgyból nem foglalkozunk, de impliciten ezekre kell gondolni.

Poincaré-formula két, illetve három eseményre

Láttuk: kizáró A, B események esetén $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Kérdés (ismerős lehet a középiskolából is): Ha A és B nem kizáróak, akkor hogyan számoljuk ki $\mathbb{P}(A \cup B)$ -t?

(Állítás – Poincaré-formula 2 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(Bizonyítás)

Mi a helyzet három esemény (A, B, C) uniójának valószínűségével?

(Állítás – Poincaré-formula 3 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B, C \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

(Bizonyítás ötlete: a táblánál)

Poincaré-formula két, illetve három eseményre

Láttuk: kizáró A, B események esetén $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Kérdés (ismerős lehet a középiskolából is): Ha A és B nem kizáróak, akkor hogyan számoljuk ki $\mathbb{P}(A \cup B)$ -t?

(Állítás – Poincaré-formula 2 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(Bizonyítás)

Mi a helyzet három esemény (A, B, C) uniójának valószínűségével?

(Állítás – Poincaré-formula 2 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B, C \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

(Bizonyítás ötlete: a táblánál)

Poincaré-formula két, illetve három eseményre

Láttuk: kizáró A, B események esetén $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Kérdés (ismerős lehet a középiskolából is): Ha A és B nem kizáróak, akkor hogyan számoljuk ki $\mathbb{P}(A \cup B)$ -t?

(Állítás – Poincaré-formula 2 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(Bizonyítás)

Mi a helyzet három esemény (A, B, C) uniójának valószínűségével?

(Állítás – Poincaré-formula 2 eseményre, 1.4.2. Tétel speciális esete.) Bármely $A, B, C \in \mathcal{F}$ eseményekre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

(Bizonyítás ötlete: a táblánál)

Általános Poincaré-formula

Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = ?$$

A kettő, illetve három halmazra vonatkozó Poincaré-formulához hasonlóan: „páratlan sok halmaz metszetének valószínűsége mindig pozitív, páros soké mindig negatív előjellel számít”.

Formálisan: egy n természetes szám esetén legyen

$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$. Így $[0] = \emptyset$.

Ekkor $k = 1, \dots, n$ esetén $[n]$ egy tipikus k -elemű részhalmaza $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Legyen

$$S_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \subseteq [n]: |I|=k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Vagyis S_k az összes k -as metszet valószínűségének összege.

(1.4.2. Tétel, Poincaré-formula.) Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ eseményekre $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$.

Általános Poincaré-formula

Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = ?$$

A kettő, illetve három halmazra vonatkozó Poincaré-formulához hasonlóan: „páratlan sok halmaz metszetének valószínűsége mindig pozitív, páros soké mindig negatív előjellel számít”.

Formálisan: egy n természetes szám esetén legyen

$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$. Így $[0] = \emptyset$.

Ekkor $k = 1, \dots, n$ esetén $[n]$ egy tipikus k -elemű részhalmaza $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Legyen

$$S_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \subseteq [n]: |I|=k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Vagyis S_k az összes k -as metszet valószínűségének összege.

(1.4.2. Tétel, Poincaré-formula.) Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ eseményekre $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k$.

Bonferroni-egyenlőtlenség

Az unió valószínűségéről akkor is kaphatunk információt, ha csak a szumma első néhány tagját nézzük és a maradékot elhanyagoljuk (pl. mert a gyakorlatban annyira kicsik és lassan számolhatók):

(1.4.3. Állítás: Bonferroni-egyenlőtlenségek.) Legyenek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, és $1 \leq m_1, m_2 \leq n$ egészek, ahol m_1 páratlan és m_2 páros. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{m_1} (-1)^{k+1} S_k \quad \text{és} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{k=1}^{m_2} (-1)^{k+1} S_k.$$

Vagyis: ha egy páratlan indexig (m_1 -ig) adjuk össze a Poincaré-formulában a tagokat, az mindig felső becslést ad. Ha egy páros indexig (m_2 -ig), az mindig alsó becslést. (A becslés lehet pontos.)

Bonferroni-egyenlőtlenség

Az unió valószínűségéről akkor is kaphatunk információt, ha csak a szumma első néhány tagját nézzük és a maradékot elhanyagoljuk (pl. mert a gyakorlatban annyira kicsik és lassan számolhatók):

(1.4.3. Állítás: Bonferroni-egyenlőtlenségek.) Legyenek

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események, és $1 \leq m_1, m_2 \leq n$ egészek, ahol m_1 páratlan és m_2 páros. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{m_1} (-1)^{k+1} S_k \quad \text{és} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{k=1}^{m_2} (-1)^{k+1} S_k.$$

Nem bizonyítjuk. Szemléltetésül: $n = 3$ esetén a Poincaré-formulából következik:

- ▶ $m_1 = 1$: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3),$
- ▶ $m_2 = 2$: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3),$
- ▶ $m_1 = 3$ esetén a 3 eseményre vonatkozó Poincaré-formulát kapjuk (= helyett $\leq$ -vel, amivel persze szintén igaz).

Boole-egyenlőtlenség

A Poincaré-formulát most nem bizonyítjuk. Lehet pl. teljes indukcióval bizonyítani.

Lesz pár hét múlva: rendes és egyszerű bizonyítás a 3 eseményre vonatkozó Poincaré-formulára $\rightarrow$ biz. ötlete n eseményre.

A következő állítás első fele azt mutatja, hogy a valószínűségek összege mindig felső korlát az unió valószínűségére – akkor is, ha az események nem kizáróak:

(1.4.4. Következmény, Boole-egyenlőtlenség.) Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ események. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_j}).$$

Az első állítást nem bizonyítjuk, a második az elsőből és a De Morgan-azonosságokból (amiket az $\overline{A_j}$ eseményekre alkalmazunk) következik.

Valószínűségi mértékek folytonossága (kiegészítő anyag)

A következő állítást nem bizonyítjuk. A jegyzetben szereplő számos tételt könnyű bizonyítani, ha ezt ismerjük, különben pedig lehetetlen.

(Állítás: valószínűségi mértékek folytonossága felülről.) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{F}, \dots$ események egy **növekvő** sorozata, vagyis $A_i \subseteq A_{i+1}, \forall i \geq 1$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Megjegyzés: a $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat monoton növvő és felülről korlátos, tehát a határértéke valóban létezik.

(Állítás: valószínűségi mértékek folytonossága alulról.) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező és $A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{F}, \dots$ események egy **csökkenő** sorozata, vagyis $A_i \supseteq A_{i+1}, \forall i \geq 1$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Megjegyzés: ez a felülről való folytonosságból és a végtelen De Morgan-azonosságból következik.

Példák klasszikus valószínűségi mezőkre –
kombinatorika, urnamodellek

Klasszikus valószínűségi mezők

Emlékeztető: klasszikus valószínűségi mező: Ω véges, minden kimenetel/elemi esemény azonos valószínűségű.

Erre nézünk ma néhány klasszikus példát. Ezek az ún. *urnamodellek*, ahol egy urnában (zsákban stb.) különböző tulajdonságú golyók vannak, és ezekből húzunk néhányat, visszatevéssel vagy anélkül, a sorrend figyelembevételével vagy anélkül.

A cél egy adott véletlen kísérlet **modellezése** alkalmas valószínűségi mezővel. A modell helyes megválasztása döntő jelentőségű, de nem feltétlenül csak egy helyes modell létezik.

A „kedvező esetek számának” és az „összes eset számának” meghatározásához először átismételjük a kombinatorika alapvető mennyiségeit, az ún. **elemi leszámlálásokat**. Ez részben középiskolai anyag, és régen a BSz2-höz tartozott, a BSc-reform után tavaly került a Valszámhoz.

Variációk

(Definíció.) Legyenek k, n természetes számok.

n elem k -ad osztályú variációja: n különböző elem közül k különböző elem sorrendje. Ezt $0 \leq k \leq n$ esetén definiáljuk.

Számuk: $V(n, k)$.

n elem k -ad osztályú ismétléses variációja: n különböző elemből k hosszú sorrend, ismétlés megengedett. Itt $k > n$ lehetséges.

Számuk: $V_{\text{ism}}(n, k)$.

Használjuk a faktoriális szokásos jelölését:

$$n! = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1.$$

Ez alapján $0! = 1$ (üres szorzat értéke mindig 1, üres összegé 0).

(Tétel.) $V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(Bizonyítás: k szerinti teljes indukcióval, lásd előadás)

(Tétel.) $V_{\text{ism}}(n, k) = n^k$.

(Bizonyítás: hasonlóan, lásd előadás)

Variációk

(Definíció.) Legyenek k, n természetes számok.

n elem k -ad osztályú variációja: n különböző elem közül k különböző elem sorrendje. Ezt $0 \leq k \leq n$ esetén definiáljuk.

Számuk: $V(n, k)$.

n elem k -ad osztályú ismétléses variációja: n különböző elemből k hosszú sorrend, ismétlés megengedett. Itt $k > n$ lehetséges.

Számuk: $V_{\text{ism}}(n, k)$.

Használjuk a faktoriális szokásos jelölését:

$$n! = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1.$$

Ez alapján $0! = 1$ (üres szorzat értéke mindig 1, üres összegé 0).

(Tétel.) $V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(Bizonyítás: k szerinti teljes indukcióval, lásd előadás)

(Tétel.) $V_{\text{ism}}(n, k) = n^k$.

(Bizonyítás: hasonlóan, lásd előadás)

Példák a variációkra

(Ismétlés nélküli) variációk: pl. autóverseny első k helyezettjének lehetséges sorrendjei (lásd össznépi gyakorlat: 1.12. feladat)

A variációkhoz kapcsolódó **urnamodell**: egy urnában van n különböző golyó, visszatevés nélkül kihúzunk k darabot.

Lehetséges kimenetek: a húzott k golyó lehetséges sorrendjei.

Egy lehetséges klasszikus valószínűségi mező erre a kísérletre:
 $\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú variációi}\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (minden részhalmaz esemény), $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{V(n,k)} = \frac{(n-k)!}{n!}$, $\forall \omega \in \Omega$.

Példák a variációkra 2.

Ismétléses variációk: pl. totó: 13+1 kérdés, mindegyikre 3 lehetséges válasz $\rightarrow V_{\text{ism}}(3, 14) = 3^{14}$ -féleképpen tölthető ki.

Az ismétléses variációkhoz kapcsolódó **urnamodell**: egy urnában van n különböző golyó, k -szor húzunk egy-egy golyót úgy, hogy a húzott golyót mindig visszatesszük. Lehetséges kimenetek: a húzott k golyó lehetséges sorrendjei.

Egy lehetséges klasszikus valószínűségi mező erre a kísérletre:

$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ism. variációi}\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{V_{\text{ism}}(n, k)} = \frac{1}{n^k}, \forall \omega \in \Omega.$$

Ezt az urnamodellt **Maxwell–Boltzmann**–urnamodellnek szokás nevezni $\rightarrow$ statisztikus fizika. (Az ilyen elnevezéseket nem kell megtanulni.)

Halmazok Descartes-szorzata, Ω megválasztása

Előző példa: $\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ism. variációi}\} \longrightarrow$
mivel reprezentálhatjuk kényelmesen ennek a halmaznak az
elemeit?

Ehhez (és sok minden máshoz) vezessük be a következő
fogalmat/jelölést:

(Def.) n halmaz, $H_1, \dots, H_n$ **Descartes-szorzatán** azon $(x_1, \dots, x_n)$
rendezett n -esek halmazát értjük, amelyekre $x_1 \in H_1, \dots, x_n \in H_n$.
Ezt a halmazt $H_1 \times \dots \times H_n$ -nel jelöljük.

Ha $H_1 = \dots = H_n = H$ (valamely H halmazra), akkor használjuk a
 $H^n = \underbrace{H \times \dots \times H}_{n \text{ darab}}$ jelölést is.

Ismert példa: $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ darab}}$ a rendezett valós szám- n -esek (“ n
magas számoszlopok”) halmaza.

Halmazok Descartes-szorzata, Ω megválasztása

Előző példa: $\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ism. variációi}\} \longrightarrow$
mivel reprezentáljuk ennek a halmaznak az elemeit?

Egy lehetséges kimenetel egy lehetséges ábrázolása például:
 $(x_1, \dots, x_k)$, ahol x_i az i -ediként húzott elem, az urnában lévő
golyók halmazának egyik eleme.

Legyen H az urnában lévő golyók halmaza. Ekkor Ω egy lehetséges
megválasztása:

$$\Omega = \underbrace{H \times H \times \dots H}_{k \text{ darab}} = H^k.$$

(És $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\omega) = 1/n^k$, $\forall \omega \in \Omega$.)

Pl. kockadobás 2 megkülönböztethető dobókockával (vagy kétszer
egymás után ugyanazzal a kockával): $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = [6]^2$.
Tipikus elemek pl. $(3, 4)$: az első dobás hármás, a második négyes,
 $(5, 5)$: mindkét dobás ötös.

Descartes-szorzat és ismétlés nélküli variációk

Még korábbi példa:

$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ismétlés nélküli variációi}\}.$

Megfigyelés: ha H az urnában lévő golyók halmaza, akkor $\Omega = H^k$ továbbra is lehetséges választás, hiszen minden kimenetel megadható $(x_1, \dots, x_k)$ alakban (x_i : i -edikként húzott elem).

Azonban ez $n > k > 1$ esetén nem lesz klasszikus valószínűségi mező, ugyanis pl. az $(x_1, x_1, x_3, \dots, x_k)$ alakú elemek nem lehetséges kimenetelek. Itt

$$\mathbb{P}((x_1, \dots, x_k)) = \begin{cases} \frac{1}{V(n,k)}, & \text{ha } x_1, \dots, x_k \text{ páronként különbözőek,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Egy másik lehetséges választás például

$$\Omega' = \{(x_1, \dots, x_k) \in H^k \mid x_1, \dots, x_k \text{ páronként különbözőek}\}.$$

Ezt használva klasszikus valószínűségi mezőt kaphatunk.

Permutációk 1.

(1. Def.) n elem permutációja: n különböző elem sorrendje.

(Állítás.) n elem permutációinak száma: $n!$.

(Bizonyítás: Ez a variációk speciális esete $k = n$ választással.)

Ez alapján a kapcsolódó urnamodell is a variációkhoz tartozó urnamodell speciális esete. Egy urnában van n különböző golyó, egymás után mindig húzunk egyet visszatevés nélkül, amíg el nem fogynak, lehetséges kimenetelek a húzott golyók sorrendjei.

Az $[n] = \{1, \dots, n\}$ elemei permutációinak halmazát S_n -nel jelöljük. (Az S betű itt arra utal, hogy ezt a halmazt n -edfokú szimmetrikus csoportnak nevezzük – azt itt nem tárgyaljuk, hogy miért.)

Példa, ahol $\Omega = S_n$ jó választás és klasszikus valószínűségi mezőt kapunk: össznépi gyakorlat (1.13. feladat, algel style)

Permutációk 2.

Ekvivalens, gyakrabban használt definíció:

(2. Def.) Az $[n]$ halmaz önmagára való, kölcsönösen egyértelmű leképezéseit (azaz *bijekcióit*) nevezzük (n -edrendű) **permutációknak**.

A permutációkat általában görög betűkkel (π, σ stb.) jelöljük.

Szokásos jelölés például: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: ez az a $\pi: [3] \rightarrow [3]$

permutáció, amelyre $\pi_1 := \pi(1) = 3$, $\pi_2 = 2$ és $\pi_3 = 1$.

Röviden szokták ezt néha a $3\ 2\ 1$ permutációnak is nevezni, bár ez a jelölés kissé elavult.

Permutációkkal BSz1-ből, a mátrixok determinánsának témakörénél már találkoztunk.

Minden n -edrendű permutációhoz tartozik egy **bástyaelhelyezés**, illetve BSz-ből definiáltuk a permutáció **inverziószámát** is.

Gyakori félreértés: maga a permutáció egy $[n] \rightarrow [n]$ függvény, nem pedig a hozzá tartozó bástyaelhelyezés.

Ismétléses permutációk

(Def.) Legyenek $n, l, k_1, \dots, k_l$ természetes számok úgy, hogy $n = k_1 + \dots + k_l$. n elem **ismétléses permutációja** ($k_1, \dots, k_l$ paraméterekkel) n olyan elem sorbarendezése, ahol k_1 elem egyforma, k_2 elem tőlük különböző, de egyforma, és így tovább, végül k_l elem az összes korábbtól különböző, de egyforma.

(Tétel.) Számuk

$$\frac{n!}{k_1! \dots k_l!}.$$

(Bizonyítás)

Megjegyzés: a korábban definiált permutációkat *ismétlés nélküli permutációknak* is nevezzük. Ezek olyan ismétléses permutációk, ahol $l = n$ és $k_1 = \dots = k_n = 1$ (vagyis bármely két elem megkülönböztethető).

Urnamodell az ismétléses permutációkra

Egy urnában van $n = k_1 + \dots + k_l$ golyó, amikből k_1 egyforma, k_2 golyó tőlük különböző, de egyforma, és így tovább, végül k_l golyó az összes korábbtól különböző, de egyforma.

Egymás után mindig húzunk egy-egy golyót visszatevés nélkül, amíg el nem fogynak, lehetséges kimenetek a húzott golyók sorrendjei.

Klasszikus valószínűségi mező erre az urnamodelldre:

$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó ism. permutációi } k_1, \dots, k_l \text{ paraméterekkel}\},$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega).$

$\mathbb{P}(\omega) = \frac{k_1! \dots k_l!}{n!}, \forall \omega \in \Omega.$

Ismétlés nélküli kombinációk

(Def.) Legyenek n, k természetes számok, amelyekre $0 \leq k \leq n$.
 n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja n elemből k darab kiválasztása, ahol a sorrend nem számít. Számuk: $C(n, k)$

(Tétel.) $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(Bizonyítás – kapcsolat az ismétlés nélküli variációkkal)

Szokásos jelölés:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{binomiális együttható}} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

Tulajdonságok (a középiskolából/más egyetemi tárgyakból is ismertek?):

- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- ▶ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. (Lásd Pascal-háromszög.)
- ▶ Binomiális tétel: lásd analízis. Egyszerű eset:
 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ha n pozitív egész és $a, b > 0$.
Fontos speciális eset: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Ismétlés nélküli kombinációk

(Def.) Legyenek n, k természetes számok, amelyekre $0 \leq k \leq n$.
 n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja n elemből k darab kiválasztása, ahol a sorrend nem számít. Számuk: $C(n, k)$

(Tétel.) $C(n, k) = \frac{n!}{k! (n-k)!}$.

(Bizonyítás – kapcsolat az ismétlés nélküli variációkkal)

Szokásos jelölés:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{binomiális együttható}} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

binomiális együttható

Tulajdonságok (a középiskolából/más egyetemi tárgyakból is ismertek?):

- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- ▶ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
- ▶ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. (Lásd Pascal-háromszög.)
- ▶ Binomiális tétel: lásd analízis. Egyszerű eset:
 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ha n pozitív egész és $a, b > 0$.
Fontos speciális eset: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Urnamodell az ismétlés nélküli kombinációkra

Van n különböző golyónk egy urnában, k darabot húzunk belőlük visszatevés nélkül, a sorrend nem számít.

$$\Omega = \{\text{az } n \text{ golyó } k\text{-ad osztályú ism. nélküli kombinációi}\},$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{C(n,k)} = \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k! (n-k)!}{n!}, \forall \omega \in \Omega.$$

Pl. 5-ös lottó: $n = 90$, $k = 5$.

Egy lehetséges kitöltés $\frac{1}{\binom{90}{5}} = 2,27535075214449 \cdot 10^{-8}$
valószínűséggel telitalálatos.

Példa, ahol a binomiális együtthatók hasznosak, pedig más az eseménytér: 2. feladatsor 1. feladat (lásd gyakorlat).

Mikor számít a sorrend? (ismétlés nélküli eset)

Gyakori modellezési kérdés: **számít-e a sorrend?**

Ez sokszor egyértelmű, de nem mindig. Esetenként több helyes modell is lehet. Ha egy feladat megoldható **ismétlés nélküli** variációkkal és kombinációkkal is, akkor mindkét módszer ugyanazt az eredményt adja.

Pl. 7. feladat a 2. feladatsoron:

Magda anyó 20 lottószelvényt tölt ki véletlenszerűen (minden szelvényen 5 számot választ ki az 1 és 90 közötti számok közül). Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket:

- (a) Bármely két szelvény különböző.
- (c) Bármely két szelvény különböző, és a 7-es szám pontosan 7 szelvényen szerepel.

Ez a feladat megoldható úgyis, hogy a 20 szelvény sorrendjét figyelembe vesszük (azaz a szelvényeket megkülönböztethetőknek tekintjük) és úgy is, hogy nem vesszük figyelembe (azaz nem tekintjük őket megkülönböztethetőknek).

Erre utal a megoldás kétféle kifejezése a Végeredmények fájlban.

Ismétléses kombinációk

(Def.) Legyenek n, k természetes számok. n elem k -adosztályú ismétléses kombinációja n -féle elemtípusból k elem kiválasztása, ismétlődés megengedett.

Számuk: $C_{\text{ism}}(n, k)$. (Itt $k > n$ lehetséges.)

Pl.: n -féle süteményből k darabot veszünk.

Ismétléses kombinációk megadása: 0–1-sorozatokkal.

Ha $a_1, \dots, a_n \geq 0$ és $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$, az ehhez tartozó ismétléses kombinációt („az 1. fajta süteményből a_1 darabot, és így tovább, az n . fajtából a_n darabot veszünk”) így kódoljuk:

$$\underbrace{1 \dots 1}_a 0 \underbrace{1 \dots 1}_b 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_c.$$

a_1 db a_2 db a_n db

Pl. $12 = 6 + 0 + 0 + 3 + 2 + 1$ kódolása: 11111100011101101.

Egy ilyen kódban mindig $n - 1$ darab nulla és k darab egyes van. Így tehát ezek mindig $n + k - 1$ hosszú 0–1-sorozatok, amelyekből k helyre írunk egyest. Ebből következik:

(Tétel.) $C_{\text{ism}}(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Ismétléses kombinációk

(Def.) Legyenek n, k természetes számok. n elem k -adosztályú ismétléses kombinációja n -féle elemtípusból k elem kiválasztása, ismétlődés megengedett.

Számuk: $C_{\text{ism}}(n, k)$. (Itt $k > n$ lehetséges.)

Pl.: n -féle süteményből k darabot veszünk.

Ismétléses kombinációk megadása: 0–1-sorozatokkal.

Ha $a_1, \dots, a_n \geq 0$ és $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$, az ehhez tartozó ismétléses kombinációt („az 1. fajta süteményből a_1 darabot, és így tovább, az n . fajtából a_n darabot veszünk”) így kódoljuk:

$$\underbrace{1 \dots 1}_a 0 \underbrace{1 \dots 1}_b 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_c.$$

a_1 db a_2 db a_n db

Pl. $12 = 6 + 0 + 0 + 3 + 2 + 1$ kódolása: 11111100011101101.

Egy ilyen kódban mindig $n - 1$ darab nulla és k darab egyes van. Így tehát ezek mindig $n + k - 1$ hosszú 0–1-sorozatok, amelyekből k helyre írunk egyest. Ebből következik:

(Tétel.) $C_{\text{ism}}(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Mikor számít a sorrend? (ismétléses eset)

Az ismétléses kombinációkhoz is tartozik egy urnamodell, ezt **Bose–Einstein**–urnamodellnek nevezzük. Szintén fizikai eredetű. Elve: k megkülönböztethetetlen golyót elhelyezünk n urnában, egy urnában több golyó is lehet, minden lehetséges konfiguráció azonos valószínűségű.

Figyelem: ez nagyon más, mint az ismétléses variációkhoz tartozó Maxwell–Boltzmann–urnamodell!

- ▶ Az ismétléses variációs urnamodell golyói megkülönböztethetők egymástól, az ismétléses kombinációs urnamodell golyói viszont nem.
- ▶ Az olyan szituációkban, ahol többször húzunk visszatevéssel „egymástól függetlenül” a golyók közül, az ismétléses variációs urnamodell a jó.
- ▶ Az ismétlés nélküli kombinációknál a sorrendet csak elhanyagoltuk, az ismétléses kombinációknál viszont nincs is értelme sorrendről beszélni, mert mindegyik golyót egyszerre helyezzük el.