

Vizsgadolgozat

- Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
 - Hogyan, és milyen feltételek mellett definiáljuk az X és Y valószínűségi változók korrelációját, az X és Y kovarianciájának és szórásainak segítségével?
 - Milyen feltétel(eke)t kell teljesítsen egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ahhoz, hogy létezzen egy X folytonos valószínűségi változó, aminek f a sűrűségfüggvénye? (Feltesszük, hogy f Riemann-integrálható.)
- Shrek születésnap ajándékot szeretne venni Fionának. Tegyük fel, hogy az ajándék kitalálásához szükséges X idő (napokban számolva) folytonos, örökifjú eloszlású valószínűségi változó a $[0, \infty)$ halmazon. Annak a valószínűsége, hogy három napnál tovább tart kitalálni az ajándékot, éppen $e^{-6} \approx 0,0025$. Ezután az ajándék beszerzése e^X napig tart. Várhatóan hány napig tart az ajándék kitalálása és beszerzése összesen?
- Egy TV-műsort 49 blokkból állítanak össze, ahol a blokkok élő bejelentkezések, így véletlenszerű időtartamúak. Tegyük fel, hogy az egyes blokkok hosszai egymástól függetlenek, azonos eloszlásúak, és várható értékük egyenként 2 perc. Annak a valószínűsége, hogy a fenti blokkok teljes időtartama 98 perc és 100 perc közé esik, 0,17. Határozzuk meg (közelítőleg) egy blokk hosszának szórását. (Feltesszük, hogy az egyes blokkok közt nem telik el idő, és időbeli átfedés sincs köztük.)
- Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat írja le:

	X			
		0	2	5
Y				
	2	α	0.2	0.1
	3	0.2	0.25	β

valamilyen $\alpha, \beta \in [0, 1]$ valós számokra. Tudjuk, hogy $\{X = 0\}$ és $\{Y = 2\}$ független események. Határozzuk meg α és β értékét, továbbá X és Y kovarianciáját.

- Az öttusa lovas számában egy versenyzőnek 12 akadályt kell átugrania egy számára ismeretlen lóval. Tegyük fel, hogy az egyes akadályokat egymástól függetlenül, p valószínűséggel sikerül átugrania.
 - Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 1 akadályt ver le a versenyző (azaz nem sikerül átugrania), p függvényében?
 - A lovat véletlenszerűen választják, így a p valószínűség nem meghatározott. Ezért jelölje V egy akadály átugrásának valószínűségét. Tegyük fel, hogy V folytonos valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye

$$F_V(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x^3 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

a ló kiválasztásától függően. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 akadályt ver le a versenyző.

- * Béla kísérleteket végez egymás után, amelyek külön-külön $\frac{1}{2}$ valószínűséggel sikeresek. A második sikeres kísérletnél megáll (de azelőtt nem). Tegyük fel, hogy a kísérletek egymástól függetlenek. Jelölje X az elvégzett kísérletek számát. Határozzuk meg X eloszlását (azaz a $\mathbb{P}(X = k)$ értékeket) és X várható értékét.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

