Bevezetés a Számításelméletbe II.

Nyolcadik gyakorlat, 2024. április 9.

1. a) 7 lány (A,B, …, G) és 6 fiú (1-től 6-ig) ért házasulandó korba egy indián törzsben. A törzsfőnök felmérte, hogy ki kivel hajlandó frigyre lépni: eredményei a jobb oldali táblázatban láthatók. A törzsfőnök szeretne minden fiúnak feleséget találni (ha már a lányok közül valaki úgyis biztos pártában marad). Lehetséges ez?

b) Sajnos konkoly hullt G és 5 szerető szívének tiszta búzájába: többé már nem hajlandók egymáséi lenni. Oldjuk meg a feladatot erre az esetre is. (ZH, 2011. május 9. nyomán)

	A	B	C	D	E	F	G
1		♥				♥	
2	♥	♥	♥	♥	♥		♥
3		♥			♥	♥	
4	♥		♥	♥		♥	♥
5					♥	♥	♥
6		♥			♥		

2. Egy 20 csúcsú G páros gráfban 18 csúcs foka 5, a maradék 2 csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

---

3. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást, egy maximális független ponthalmazt, egy minimális lefogó ponthalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt G-ben. (∼ZH, 2022. június 1.)

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

4. Egy 19 csúcsú páros gráfban 17 csúcs foka 6, a maradék 2 csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy van a gráfnak 9 élű párosítása.

5. Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás. (ZH, 2015. április 23.)

6. Az első feladatban szereplő törzsben egy korábbi évben 10 fiú és 10 lány szeretett volna megházasodni és mindnyájan legalább 5 ellenkező nemű házasulandónak voltak hajlandók örök hűséget esküdni. Mutassuk meg, hogy ekkor létre lehetett hozni 10 házaspárt.

7*. Egy 100×100-as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2-es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedi le. (ZH, 2021. április 30.)

---

8. Egy 100 csúcsú G gráfban van teljes párosítás. Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G}) \leq 50$. (ZH, 2010. október 18.)

9. Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha a jobbra látható mátrix i. sorának j. eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G-ben olyan párosítás, mely B minden csúcsát fedi. (∼ZH, 2014. október 27.)

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

10. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, minden csúcs foka legalább 2. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van teljes párosítás? (ZH, 2010. május 6.)

11. Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).

12. A sakktáblán találomra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.