Minimális vágások keresése, Nagamochi–Ibaraki-algoritmus

Gráfok és algoritmusok

9. gyakorlat

2025.

Definíció.

Legyen $G = (V, E)$ és $c\colon E \to \mathbb{N}$ egy súlyfüggvény, ami azt írja le, hogy hány párhuzamos élt jelent egy-egy él. Az $e = uv$ él *összehúzása* alatt azt értjük, hogy azonosítjük az u és v csúcsokat, töröljük a keletkező $c(uv)$ darab hurokélt, és tetszőleges $x \in V \setminus \{u, v\}$ esetén $c(xw) = c(ux) + c(vx)$ lesz, ahol w az azonosítással keletkező új csúcs.

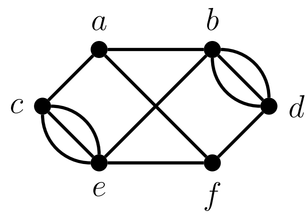
Definíció.

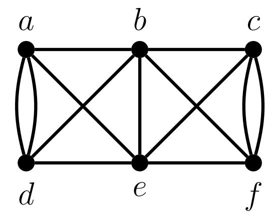
A G multigráf *maxvissza sorrendje* a G csúcsainak olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre minden $1 \le i < j \le n$ esetén $d(V_i, v_{i+1}) \ge d(V_i, v_j)$ teljesül, ahol $V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, azaz a soron következő csúcs mindig a korábbi csúcsokkal leginkább összekötött csúcsok egyike.

Tétel.

Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje, akkor az u és v között vezető, páronként éldiszjunkt G-beli utak maximális száma $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$.

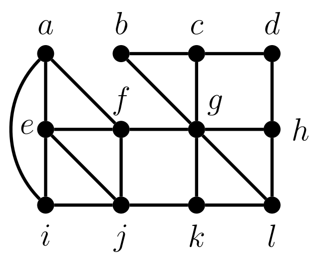
1. (a) Futtassuk a Karger-algoritmust az alábbi gráfokra.
   (b) Határozzuk meg az alábbi gráfok egy maxvissza sorrendjét és az ahhoz tartozó $F_1, F_2, \ldots$ erdőket.
   (c) Határozzunk meg a Nagamochi–Ibaraki-algoritmussal az alábbi gráfokban egy-egy minimális vágást.





2. Legyen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf két olyan maxvissza sorrendje, amire $u_{n-1} = v_n$ és $u_n = v_{n-1}$ teljesül, azaz a két utolsó csúcs ugyanaz, de fordított sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $d(u_{n-1}) = d(u_n)$.

3. Van az alábbi gráfnak olyan maxvissza sorrendje, amelyikben az utolsó két csúcs j és k?



4. Legyenek a G gráf csúcsai $u_1, u_2, \ldots, u_n$ és $v_1, v_2, \ldots, v_n$, élei pedig u_1v_1, u_2v_2, …, $u_{n-1}v_{n-1}$ valamint minden $1 \le i < j \le n$ esetén fusson él u_i és u_j, illetve v_i és v_j között. Lehet-e u_1 és v_1 (valamilyen sorrendben) a G csúcsainak alkalmas maxvissza sorrendjében az utolsó két csúcs?

5. Igazoljuk, hogy ha G egy k-reguláris gráf, akkor található G-ben k darab páronként éldiszjunkt út alkalmas u és v csúcsok között.

6. Legyen G egy olyan legalább 3-csúcsú, hurokélmentes, de nem feltétlenül egyszerű gráf, amelynek nincs két azonos fokszámú csúcsa. Igazoljuk, hogy van G-nek olyan csúcsa, ami G egyetlen maxvissza sorrendjében sem az utolsó.

7. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amiben ha $\lambda(u,v) = d(v)$ teljesül két különböző u és v csúcsra, akkor a v csúcs bizonyosan a v_1 vagy v_2 csúcs valamelyike. Bizonyítsuk be, hogy ha $|V(G)| > 2$, akkor v_1 és v_2 nem szomszédosak G-ben.
8. Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges véges (legalább 2-csúcsú) multigráf. Igazoljuk, hogy találhatók u_1, w_1 és u_2, w_2 csúcsok úgy, hogy $u_1 \neq u_2$ és $d(u_i) = \lambda(u_i, w_i)$ teljesül minden $i \in \{1, 2\}$-re.
9. Legyen G olyan gráf, melynek van $(\ldots, v_1, v_2)$, $(\ldots, v_2, v_3)$, $\ldots$, $(\ldots, v_{n-1}, v_n)$, valamint $(\ldots, v_n, v_1)$ alakú maxvissza sorrendje is. Igazoljuk, hogy ekkor G reguláris.
10. Legyen G egy olyan egyszerű és összefüggő gráf, melynek bármely maxvissza sorrendjének megfordítása szintén maxvissza sorrendje G-nek. Mutassuk meg, hogy ekkor G reguláris.
11. Tegyük fel, hogy az n-pontú G gráf egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkézés szerint G-nek pontosan $4n - 4$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf 4-élösszefüggő.
12. Tegyük fel, hogy az n-pontú G gráf nem 4-élösszefüggő, és egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkézés szerint G-nek pontosan $4n - 5$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy G-nek egyetlen egy háromélű vágása van.
13. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi–Ibaraki-algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüggőségi számát, akkor a maxvissza sorrendekben az utolsó csúcsok fokszáma rendre $7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9$.
    (a) Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t.
    (b) Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4-elemű X ponthalmaza, ami egy minimális vágást határoz meg?
14. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi–Ibaraki-algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüggőségi számát, akkor a maxvissza sorrendekben az utolsó csúcsok fokszáma rendre $7, 9, 4, 6, 7, 7, 6, 8, 6, 7, 9$.
    (a) Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t.
    (b) Legkevesebb hány élt kell behúzni G-be ahhoz, hogy a kapott gráf 6-szorosan élösszefüggő legyen?