

Minimális költségű folyamok

GRÁFOK ÉS ALGORITMUSOK

8. gyakorlat

2025.

Minimális költségű folyam.

A (G, s, t, c) hálózatban egy f megengedett st -folyam *minimális költségű* a $w: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ költségfüggvényre, ha az f folyam $\sum_{e \in E} w(e)f(e)$ költsége a lehető legkisebb az f -fel megegyező nagyságú st -folyamok között.

Potenciál.

Egy $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvényt *potenciálnak* nevezünk, ha $\pi(s) = 0$ és $\pi(v) \leq \pi(t)$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.

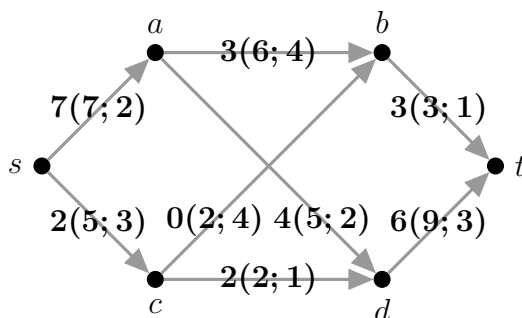
Módosított költségfüggvény.

Adott π potenciál esetén egy uv él *módosított költségén* a $w(uv) - (\pi(v) - \pi(u))$ értéket értjük.

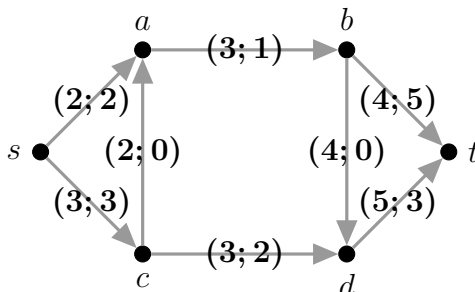
Tétel.

Egy f megengedett st -folyam pontosan akkor minimális költségű, ha létezik olyan π potenciál, hogy minden negatív módosított költségű él telített és minden pozitív módosított költségű él üres.

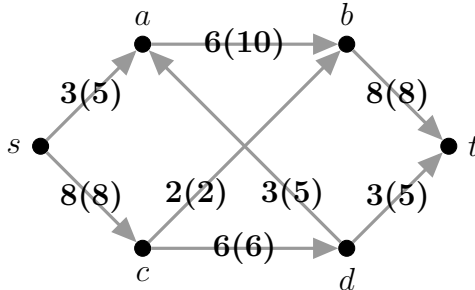
- (a) Alkalmas potenciál segítségével mutassuk meg, hogy az alábbi 9-nagyságú folyam minimális költségű. (Az éleken szereplő első szám a folyam folyam értéke az élen, a zárójelben szereplő első szám az él kapacitása, a második pedig az élen egységnyi folyam átvitelének a költsége.)
(b) Adjunk meg egy minimális költségű, 10-nagyságú folyamat ebben a hálózatban.



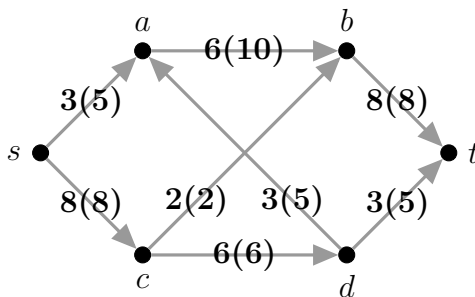
- Van-e olyan minimális költségű st -folyam az alábbi hálózatban, aminek optimalitását bizonyítja a $\pi(s) = 0, \pi(a) = \pi(c) = 3, \pi(b) = \pi(d) = 5, \pi(t) = 9$ értékekkel adott potenciál?



3. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban a $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ költségfüggvényre nézve f_1 egy 42-nagyságú, 42-költségű, f_2 pedig egy 90-nagyságú, 102-költségű st -folyam. Bizonyítsuk be, hogy ebben a hálózatban a 66-nagyságú minimális költségű st -folyam költsége legfeljebb 72.
4. Létezik olyan $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, amire az alábbi (G, s, t, c) hálózatban megadott f folyam minimális költségű?



5. Létezik olyan 13-nagyságú st -folyam az alábbi (G, s, t, c) hálózatban, ami minimális költségű minden olyan nemnegatív költségfüggvény mellett, amire az ábrán megadott f folyam minimális költségű?



6. Legyen G egy páros gráf és $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges súlyfüggvény.
- Adjunk polinomidejű algoritmust maximális összsúlyú teljes párosítás keresésére.
 - Adjunk polinomidejű algoritmust maximális összsúlyú párosítás keresésére.
7. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden élhez két nemnegatív költség adott: az első az élen az egységnyi folyam átvitelének, a második az él kapacitásának egységnyi megnövelésének a költsége (ez utóbbiba a szállítási költség nem értendő bele; például ha egy 5-kapacitású él első költsége 1, a második költsége pedig 2, akkor ezen az élen 8 egységnyi folyam átvitelének a költsége 14). Adjunk hatékony algoritmust minimális összköltségű k -nagyságú st -folyam meghatározására tetszőleges $k \in \mathbb{R}_+$ esetén.