

Merevkörű gráfok

GRÁFOK ÉS ALGORITMUSOK

10. gyakorlat
2025.

Definíció.

A $G = (V, E)$ gráf *intervallumgráf*, ha csúcsai megfeleltethetők $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ intervallumoknak, és $I_i I_j \in E$ akkor és csak akkor, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

A G gráf *splitgráf*, ha $G = (U \cup V, E)$, ahol U független ponthalmaz, V pedig klikk.

A G gráf *merevkörű*, ha G nem tartalmaz 3-nál hosszabb feszített kört.

Definíció.

A G gráf v csúcsa *szimpliciális*, ha v szomszédai klikket alkotnak G -ben.

Definíció.

A G gráf csúcsainak *szimpliciális sorrendje* egy olyan v_1, v_2, \dots, v_n sorrend, amelyre minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén v_i szimpliciális csúcsa a v_i, v_{i+1}, \dots, v_n csúcsok által feszített gráfnak.

Tétel.

Egy gráfnak akkor és csak akkor létezik szimpliciális sorrendje, ha merevkörű.

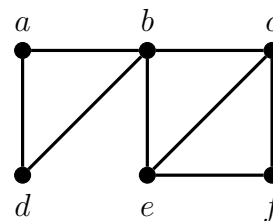
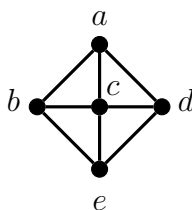
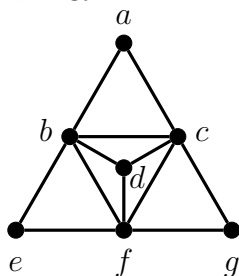
Tétel.

Ha G merevkörű, akkor tetszőleges maxvissza sorrendjének megfordítása G egy szimpliciális sorrendje lesz.

Tétel.

Ha G merevkörű, akkor $\chi_\ell(G) = \chi(G) = \omega(G)$.

1. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok közül melyek merevkörűek, splitgráfok, illetve intervallumgráfok!



2. Az 1. feladatbeli merevkörű gráfoknak adjuk meg egy szimpliciális sorrendjét.
 3. Az 1. feladatbeli merevkörű gráfoknak adjuk meg egy optimális színezését.
 4. Az 1. feladatbeli merevkörű gráfoknak adjuk meg egy helyes listaszínezését az alábbi színlistákra nézve. (A listákban szereplő színek: piros, kék, zöld, sárga, lila, narancssárga, barna.)

1. gráf

a	{P,Z,S,N}
b	{P,K,L,B}
c	{P,K,Z,B}
d	{K,Z,S,L}
e	{K,S,L,B}
f	{K,Z,S,L}
g	{Z,L,N,B}

2. gráf

a	{K,S,L}
b	{P,N,B}
c	{Z,S,N}
d	{K,Z,L}
e	{P,Z,L}

3. gráf

a	{S,L,B}
b	{K,Z,N}
c	{L,N,B}
d	{K,S,L}
e	{K,Z,L}
f	{Z,L,B}

5. Igaz-e, hogy bármely merevkörű G gráf bármely szimpliciális sorrendjének megfordítása G egy max-vissza sorrendje lesz?
6. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő, merevkörű, nem teljes gráf, és $X \subset V(G)$ egy legszűkebb elvágó ponthalmaz, azaz $G - X$ nem összefüggő, de $X' \subsetneq X$ esetén $G - X'$ még összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy X klikket feszít G -ben.
7. Legyen G egy merevkörű gráf, és a G egy szimpliciális sorrendje szerint válasszunk ki mohón egy független ponthalmazt. Mutassuk meg, hogy az így kapott független ponthalmaz maximális méretű G -ben.
8. Egy G gráf favastagságán a legkisebb olyan k számot értjük, melyre létezik olyan merevkörű gráf, melynek klikkszáma $k + 1$ és tartalmazza G -t részgráfként. A G favastagságát $\text{tw}(G)$ jelöli.
Határozzuk meg az n -csúcú teljes gráf, az n -csúcú fák, az n -csúcú kör, és az 1. feladatbeli gráfok favastagságát.
9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf esetén $\chi(G) \leq \text{tw}(G) + 1$.