Vizsgadolgozat

a koronavírus-járvány idején szervezett számonkéréshez

Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Artimetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Legyenek X és Y független valószínűségi változók.
   (a) $X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{4}\right)$ és $\mathbb{P}(Y=i)=\frac{i}{12}$ minden $i \in \{3,4,5\}$ esetén. Mi az esélye, hogy $4 \le X+Y \le 5$?
   (b) $X \sim U(2;7)$ és $f_Y(y)=\frac{3}{32}(-y^2+6y-5)$, ha $1<y<5$ és 0 egyébként. Határozzuk meg az $f_{X+Y}(5)$ értéket. (Ahol f_V jelöli egy V valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.)

a) rész:

(1 pont) $\text{Ran}(X)=\{1,2,3,...\}$, $\text{Ran}(Y)=\{3,4,5\}$, tehát $\text{Ran}(X+Y)=\{4,5,6,...\}$
(2 pont) Ezért $\mathbb{P}(4 \le X+Y \le 5)=\mathbb{P}(X+Y=4)+\mathbb{P}(X+Y=5)$
(1 pont) $\mathbb{P}(X+Y=4)=\mathbb{P}(X=1,Y=3)$
(1 pont) Mivel X és Y függetlenek:
(2 pont) $=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{16}$
(2 pont) $\mathbb{P}(X+Y=5)=\mathbb{P}(X=1,Y=4)+\mathbb{P}(X=2,Y=3)=$
(0 pont) Ismét a függetlenség miatt:
(Ha ennél a lépésnél hivatkozunk a függetlenségre, de az előzőnél nem, akkor is jár a fenti 1 pont.)
(2 pont) $=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=4)+\mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}(Y=3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{12}+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{12}+\frac{9}{192}=\frac{25}{192}$
(1 pont) $\mathbb{P}(4 \le X+Y \le 5)=\frac{1}{16}+\frac{25}{192}=\underline{\underline{\frac{37}{192}}}$

b) rész:

(1 pont) Ekkor $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & \text{ha } x\in(2;7)\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$
(1 pont) Mivel X és Y függetlenek, ezért használható az alábbi konvolúciós formula:
(2 pont) $f_{X+Y}(5)=\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f_X(5-y)\mathrm{d}y$
(Az általános konvolúciós formulára, ahol az 5 még nincs behelyettesítve, szintén jár a két pont.)
(2 pont) Az integrandus pontosan akkor nem nulla, ha $1<y<5$ és $2<5-y<7$
(1 pont) A másodikat átrendezve: $-2<y<3$
(1 pont) A korlátokat egyesítve: $1<y<3$

(2 pont) $f_{X+Y}(5) = \int_1^3 \frac{3}{32}(-y^2+6y-5)\frac{1}{5}dy =$
(2 pont) $= \frac{1}{160}\left[-y^3+9y^2-15y\right]_1^3 = \frac{1}{160}(-27+81-45+1-9+15) =$
(1 pont) $= \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$

2. Egy grafikus elvállalta 144 db kép megfestését. Egy kép megfestéséhez szükséges órában számolt X idő sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } 1 < x < e, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az egyes képekhez szükséges idők egymástól függetlenek, a grafikus egyszerre egy képen dolgozik, és amint végzett eggyel, kezdi a következőt. Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy teljesíti vállalását, vagyis az összes képpel elkészül, összesen legfeljebb $144 \cdot e - 140 (\approx 251{,}4)$ óra alatt?

(1 pont) Jelölje X_i az i-edik kép megfestéséhez szükséges időt.
(2 pont) $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{144} X_i \le 144e - 140\right) = ?$
(3 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^e 1\mathrm{d}x = [x]_1^e = e - 1$
(3 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^e x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{2}$
(3 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{e^2-1}{2} - e^2 + 2e - 1 = 2e - \frac{3+e^2}{2} \approx 0{,}2420$
(1 pont) $\mathbb{D}(X) \approx 0{,}4920$

Standardizálunk:
(4 pont) $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{144} X_i \le 144e - 140) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{144} X_i - 144(e-1)}{12\cdot 0{,}4920} \le \frac{4}{12\cdot 0{,}4920}\right)$
(3 pont) A centrális határeloszlás-tétel szerint $\frac{\sum_{i=1}^{144} X_i - 144(e-1)}{12\cdot 0{,}4920}$ közelítőleg standard normális.
(3 pont) Ezért $\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{144} X_i - 144(e-1)}{12\cdot 0{,}4920} \le \frac{4}{12\cdot 0{,}4920}\right) \approx \Phi\left(\frac{4}{12\cdot 0{,}4920}\right) \approx \Phi(0{,}68)$
(2 pont) $\approx \underline{\underline{0{,}7517}}$

3.* Bélának van egy piros és egy kék véletlenszám-generátora. Mindkettő egyenletesen véletlen, egymástól független, 0 és 1 közötti valós számokat generál.

(a) Mi a valószínűsége, hogy a kékkel generált szám kisebb a pirossal generált szám négyzeténél?

Béla addig ismételgeti a véletlenszám-generálást (a két géppel egyszerre), amíg a kékkel utoljára generált szám kisebb a pirossal utoljára generált szám négyzeténél. Amikor ez a feltétel nem teljesül, akkor Béla leáll a generálgatással, és összeadja az összes olyan számot, amit eddig a kék géppel generált; jelölje ezt az összeget S.

(b) Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2} + p \cdot \mathbb{E}(S)$, ahol p az (a) részfeladatban meghatározott mennyiség. Határozzuk meg $\mathbb{E}(S)$-t. (Feltehetjük azt is, hogy $\mathbb{E}(S)$ létezik és véges.)
(c) Igaz-e, hogy $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2} + p \cdot \mathbb{E}(S)$? (Továbbra is feltételezve, hogy $\mathbb{E}(S)$ létezik és véges.)

a) rész:

(1 pont) Jelölje a kék generátor által generált számot Y, a piros által generáltat pedig X.
(2 pont) Mivel X és Y függetlenek, és mind a kettő uniform a $[0;1]$ intervallumon, ezért úgy is el lehet képzelni, hogy az egységnégyzetből veszünk véletlenszerűen egy pontot, aminek az első koordinátája az X, a második koordinátája az Y.
(0 pont) Ekkor az $Y < X^2$ esemény geometriai valószínűségként számolható:
(2 pont) $\mathbb{P}(Y < X^2) = \frac{T(A)}{T(\Omega)}$, ahol A az $y = x^2$ görbe alatti síkrésznek és az egységnégyzetnek a metszete.
(2 pont) $\mathbb{P}(Y < X^2) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{\int_0^1 x^2 dx}{1} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$
(1 pont) $= \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

b) rész:

(0 pont) A feltétel miatt $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2} + p \cdot \mathbb{E}(S)$
(1 pont) Ahol az a) rész miatt $p = \frac{1}{3}$
(1 pont) Átrendezve: $(1-p)\,\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2}$
(2 pont) Tehát $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2(1-p)} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

c) rész:

(0 pont) Jelölje X és Y az elsőnek generált piros, illetve kék számot.
(2 pont) Definiáljuk az S_2 mennyiséget úgy, mint az első kört leszámítva a kék géppel generált számok összegét. Azaz $S = Y + S_2$, ahol Y az a) részben definiált.
(0 pont) A várható érték additivitása miatt:
(2 pont) $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(S_2)$
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ (hiszen Y egyenletes)
(1 pont) Teljes várható érték tétele alapján
(3 pont) $\mathbb{E}(S_2) = \mathbb{E}(S_2|Y < X^2) \cdot \mathbb{P}(Y < X^2) + \mathbb{E}(S_2|Y \geq X^2) \cdot \mathbb{P}(Y \geq X^2)$
(1 pont) Ahol $\mathbb{E}(S_2|Y < X^2) = 0$, hiszen a feltétel esetén megállunk az első dobásnál.
(2 pont) Továbbá, $\mathbb{E}(S_2|Y \geq X^2) = \mathbb{E}(S)$, hiszen ha feltesszük, hogy az első lépésnél nem álltunk meg, akkor S_2 ugyanolyan eloszlású, mint a feltétel nélküli S.
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2} + \mathbb{E}(S) \cdot \mathbb{P}(Y \geq X^2)$, ahol $\mathbb{P}(Y \geq X^2) = 1 - p$, vagyis a kérdéses egyenlet igaz.