Vizsgadolgozat
a koronavírus-járvány idején szervezett számonkéréshez

Tudnivalók: A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.
A munkaidő 45 perc (+15 perc a megoldások feltöltésére). A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését.

---

1. Legyenek X és Y független valószínűségi változók.
   (a) $X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{4}\right)$ és $\mathbb{P}(Y = i) = \frac{i}{12}$ minden $i \in \{3, 4, 5\}$ esetén. Mi az esélye, hogy $4 \le X + Y \le 5$?
   (b) $X \sim U(2; 7)$ és $f_Y(y) = \frac{3}{32}(-y^2 + 6y - 5)$, ha $1 < y < 5$ és 0 egyébként. Határozzuk meg az $f_{X+Y}(5)$ értéket. (Ahol f_V jelöli egy V valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.)

2. Egy grafikus elvállalta 144 db kép megfestését. Egy kép megfestéséhez szükséges órában számolt X idő sűrűségfüggvénye:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } 1 < x < e, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   Az egyes képekhez szükséges idők egymástól függetlenek, a grafikus egyszerre egy képen dolgozik, és amint végzett eggyel, kezdi a következőt. Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy teljesíti vállalását, vagyis az összes képpel elkészül, összesen legfeljebb $144 \cdot e - 140 (\approx 251{,}4)$ óra alatt?

3.* Bélának van egy piros és egy kék véletlenszám-generátora. Mindkettő egyenletesen véletlen, egymástól független, 0 és 1 közötti valós számokat generál.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy a kékkel generált szám kisebb a pirossal generált szám négyzeténél?

   Béla addig ismételgeti a véletlenszám-generálást (a két géppel egyszerre), amíg a kékkel utoljára generált szám kisebb a pirossal utoljára generált szám négyzeténél. Amikor ez a feltétel nem teljesül, akkor Béla leáll a generálgatással, és összeadja az összes olyan számot, amit eddig a kék géppel generált; jelölje ezt az összeget S.

   (b) Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2} + p \cdot \mathbb{E}(S)$, ahol p az (a) részfeladatban meghatározott mennyiség. Határozzuk meg $\mathbb{E}(S)$-t. (Feltehetjük azt is, hogy $\mathbb{E}(S)$ létezik és véges.)
   (c) Igaz-e, hogy $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2} + p \cdot \mathbb{E}(S)$? (Továbbra is feltételezve, hogy $\mathbb{E}(S)$ létezik és véges.)

Eloszlás neve	Jelölés	Ran(X)	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim normális	$\mathrm{N}\left(\underline{\mu};\underline{\underline{\Sigma}}\right)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	$\underline{\underline{\Sigma}}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998