Vizsgadolgozat
a koronavírus-járvány idején szervezett számonkéréshez
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Artimetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Határozzuk meg az $Y = (X-1)(X+1)$ valószínűségi változó várható értékét, ha

   a) X diszkrét valószínűségi változó, amire
$$\mathbb{P}(X=i) = \begin{cases} \frac{i}{12} & \text{ha } i \in \{1,2,3\} \\ \frac{i+3}{12} & \text{ha } i \in \{-2,-1,0\} \end{cases}$$
   és $\mathrm{Ran}(X) = \{-2,-1,0,1,2,3\}$.

   b) X folytonos valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2}{18} & \text{ha } -3 < x \le 0 \\ \frac{x^2+3^2}{18} & \text{ha } 0 < x \le 3 \end{cases}$$
   és $\mathrm{Ran}(X) = [-3;3]$.

(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left((X-1)(X+1)\right) = \mathbb{E}\left(X^2-1\right)$
(1 pont) $= \mathbb{E}(X^2) - 1$
(Ha ez az azonosság nem kerül elő a megoldás során, de eljut a konkrét összegzés ill. integrálás lépéséig, akkor a 3 pontból 2 az a) rész, 1 a b) rész megoldási részben elérhető pontszámhoz adandó hozzá.)
(1 pont) A transzformált valószínűségi változó várható értékére vonatkozó állítás miatt

a) rész:
(2 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=-2}^{3} i^2\, \mathbb{P}(X=i)$
(3 pont) $= 4 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{2}{12} + 0 \cdot \frac{3}{12} + 1 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{2}{12} + 9 \cdot \frac{3}{12}$
(1 pont) $= \frac{42}{12} = 3{,}5$
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = 3{,}5 - 1 = \underline{\underline{2{,}5}}$

b) rész:
(2 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$

(2 pont) $f_X(x) = F'_X(x)$ (ahol F_X deriválható, különben 0)

(3 pont) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{9} & \text{ha } -3 < x \le 0 \\ \frac{x}{9} & \text{ha } 0 < x \le 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ (A nulla értékű eset nélkül legfeljebb 2 pont.)

(3 pont) $= \int_{-3}^{0} x^2 \frac{x+3}{9} dx + \int_0^3 x^2 \frac{x}{9} dx$

(2 pont) $= \left[\frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{9}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^4}{36}\right]_0^3$

(1 pont) $= 0 - \left(\frac{81}{36} - \frac{27}{9}\right) + \frac{81}{36} - 0 = 3$

(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$

2. De Frász kisasszony kutyaszőrmebundát szeretne készíttetni, ezért segédeit több alkalommal is elküldi kutyákat befogni. Tegyük fel, hogy minden egyes alkalommal 10 kutyát próbálnak befogni. A jó képességű segítők minden egyes kutyát 1% eséllyel kapnak el, a többitől függetlenül. Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy 1000 kutyafogó portyából összesen több, mint 101 ebet kapnak el?

(1 pont) Jelölje X_i az i. portyán elkapott kutyák számát.
(2 pont) $X_i \sim \mathrm{Bin}(10; 0{,}01)$
(1 pont) $\mathbb{E}(X_i) = 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$
(1 pont) $\mathbb{D}(X_i) = \sqrt{10 \cdot 0{,}01 \cdot (1 - 0{,}01)} = \sqrt{0{,}099}\ (\approx 0{,}3146)$
(2 pont) $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{1000} X_i > 101) = ?$
(2 pont) $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{1000} X_i > 101) = 1 - \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{1000} X_i \le 101)$

Standardizálunk:

(4 pont) $= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000\cdot\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{1000}\cdot\mathbb{D}(X_1)} \le \frac{101 - 1000\cdot\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{1000}\cdot\mathbb{D}(X_1)}\right)$

(2 pont) $= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 100}{\sqrt{99}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}\right)$

(0 pont) $X_1, X_2, \dots X_{1000}$ egymástól független azonos eloszlású valószínűségi változók,
(1 pont) ezért a centrális határeloszlás-tétel miatt:

(3 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 100}{\sqrt{99}}$ közelítőleg standard normális és így:

(3 pont) $= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 100}{\sqrt{99}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{99}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}1005)$

(Ha valaki $\le$ 101 helyett $<$ 102-vel számol, és így már fentebb elhagyja az egyenlőséget, és nem használja ki a normális eloszlás folytonosságát, az is teljes pontot ér.)

(2 pont) $= 1 - 0{,}5398$ (avagy számológéppel $1 - 0{,}5400$)

(1 pont) $= \underline{\underline{0{,}4602}}$ (Számológéppel: 0,46; illetve ha $\le$ 101 helyett $<$ 102-vel számolunk, akkor táblázat alapján 0,4207, számológéppel 0,4203.)

(CHT helyett de Moivre–Laplace-tétellel helyesen megoldva a feladatot szintén jár a maximális pont.)

3. Legyen $(X, Y) \sim N(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$ normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Tegyük fel, hogy $\mathbb{D}^2(X) \ne 0$, továbbá

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(Y, X) \\ \mathbb{D}^2(X) \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y)^2 & -\mathrm{cov}(Y, X) \\ \mathrm{cov}(X, Y) & \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a $\mathbb{P}\left(f_X(X) < f_Y(Y)\right)$ valószínűséget.

(2 pont) $\underline{\underline{\Sigma}}$ szimmetrikus mátrix, ezért $\mathrm{cov}(X, Y) = -\mathrm{cov}(Y, X)$
(2 pont) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$ így az előzőből következik, hogy $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$
(2 pont) Mivel X és Y egy kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó komponensei, és $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, így X és Y függetlenek és normális eloszlásúak.
(2 pont) $\underline{\mu}$-re tett feltételből következik, hogy $\mathbb{E}(X) = \mathrm{cov}(Y, X) = 0$ illetve $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{D}^2(X)$.
(2 pont) $\underline{\underline{\Sigma}}$-ra tett feltételből: $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(Y)^2$ és $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y)$.
(2 pont) Ezekből: $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(Y)^2$.
(1 pont) Mivel $\mathbb{D}^2(X) \ne 0$, ezért ez csak úgy teljesülhet, ha
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(Y)^2 = 1$
(1 pont) Így tehát $\mathbb{D}^2(Y) = 1$.

Összefoglalva: $X \sim N(0;1)$, $Y \sim N(1;1)$ függetlenek.

(2 pont) $\mathbb{P}\left(f_X(X) < f_Y(Y)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X^2}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(Y-1)^2}{2}}\right)$

(2 pont) $= \mathbb{P}\left(-\frac{X^2}{2} < -\frac{(Y-1)^2}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X^2 > (Y-1)^2\right)$

(2 pont) Jelölje $Z = Y - 1$. Ekkor $Z \sim N(1,0)$, továbbá Z és X is függetlenek és azonos eloszlásúak.

(2 pont) Ezért szimmetria okokból: $\mathbb{P}\left(X^2 > Z^2\right) = \mathbb{P}\left(X^2 < Z^2\right)$.

(1 pont) Továbbá $\mathbb{P}\left(X^2 > Z^2\right) + \mathbb{P}\left(X^2 < Z^2\right) = \mathbb{P}(X^2 \neq Z^2) = 1$.

(1 pont) Így tehát a keresett $\mathbb{P}(X^2 > Z^2)$ valószínűség $\underline{\underline{0{,}5}}$.