Vizsgadolgozat
a koronavírus-járvány idején szervezett számonkéréshez
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Artimetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Béla felhívja a Lajhár Zagyvál Kft. telefonos ügyfélszolgálatát. Itt három ügyintézőhöz kapcsolhatják: $\frac{1}{4}$ eséllyel az 1-es ügyintézővel beszél, aki $\mathrm{Exp}(\frac{1}{t})$ eloszlású idő alatt oldja meg a problémáját, $\frac{1}{3}$ eséllyel a 2-es ügyintézővel, aki $\mathrm{Exp}(\frac{2}{t})$ eloszlású idő alatt oldja meg a problémáját (mindkét esetben órában számolva), ahol t pozitív valós szám. Egyéb esetben a 3-as számú ügyintézőhöz kerül, aki konstans 1 óra alatt segít neki. Jelölje Béla várakozási idejét Y.

   a) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$ értékét t függvényében.

   b) Legyen $T \sim \mathrm{Exp}(5)$, továbbá Z egy olyan valószínűségi változó, aminek a $T = t$ feltétel esetén éppen az a) részből adódó (t-től függő) $\mathbb{E}(Y)$ a várható értéke. Határozzuk meg $\mathbb{E}(Z)$ értékét.

   a) rész:
   (1 pont) Jelölje $A_1,\ A_2,\ A_3$ azon eseményeket, hogy Bélát az első, második, illetve a harmadik ügyintézőhöz kapcsolják.
   (1 pont) $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A_3) = \frac{5}{12}$.
   (1 pont) A_1, A_2, A_3 teljes esemény rendszert alkot.
   (1 pont) Emiatt, a (diszkrét) teljes várható érték tétel alapján:
   (3 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{E}(Y|A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{E}(Y|A_3)\,\mathbb{P}(A_3)$
   (0 pont) Jelölje X_i az i-edik ügyintézőnél eltöltött időt.
   (1 pont) $\mathbb{E}(Y \mid A_i) = \mathbb{E}(X_i)$
   (2 pont) $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{t})$, $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\frac{2}{t})$, és X_3 konstans 1.
   (2 pont) $\mathbb{E}(X_1) = 1\Big/\frac{1}{t} = t$, $\mathbb{E}(X_2) = 1\Big/\frac{2}{t} = \frac{t}{2}$, $\mathbb{E}(X_3) = 1$
   (1 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \frac{1}{4} + \mathbb{E}(X_2) \cdot \frac{1}{3} + \mathbb{E}(X_3) \cdot \frac{5}{12}$
   (1 pont) $= t \cdot \frac{1}{4} + \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12}(t+1)$

b) rész:
(2 pont) A feladat szövege szerint $\mathbb{E}(Z \mid T = t) = \mathbb{E}(Y)$ minden pozitív valós t esetén.
(0 pont) $\mathbb{E}(Z) = ?$
(1 pont) A (folytonos) teljes várható érték tétel alapján:
(3 pont) $\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(Z \mid T = t) f_T(t) \mathrm{d}t$
(1 pont) $f_T(t) = 5e^{-5t}$, ha $t > 0$ és 0 különben.
(1 pont) $\mathbb{E}(Z) = \int_0^{\infty} \mathbb{E}(Z \mid T = t) \cdot 5e^{-5t} \mathrm{d}t$
(1 pont) $= \int_0^{\infty} \frac{5}{12}(t+1) \cdot 5e^{-5t} \mathrm{d}t$
(1 pont) $= \frac{5}{12}\left(\int_0^{\infty} t5e^{-5t}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} 5e^{-5t}\mathrm{d}t\right) = \frac{5}{12}\left(\mathbb{E}(T) + 1\right) = \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{1}{5} + 1\right)$
(Az integrál más módon is kiszámolható.)
(1 pont) $= \underline{\underline{0{,}5}}$

2. A Mikulás épp 441 ajándékot próbál belepakolni a zsákjába. Az egyes ajándékok térfogata egymástól független, azonos eloszlású. Tudjuk továbbá, hogy az egyes ajándékok (m^3-ben számolt) térfogatának szórása megegyezik a térfogatuk várható értékének a felével. A zsákba legfeljebb 100 m^3 ajándék fér. Mekkora az egyes ajándékok térfogatának szórása, ha 98% eséllyel az összes ajándék belefér a zsákba? (A Mikulás varázszsákjában az ajándékok mind alkalmasan deformálódnak, így feltehető, hogy a térfogataik összeadódnak.)

(1 pont) Jelölje X_i az i. ajándék térfogatát.
(0 pont) X_i-k azonos eloszlású, egymástól független valószínűségi változók.
(1 pont) $\mathbb{D}(X_i) = ?$ (Ha csak a végén meg van határozva, de kiderül, hogy $\mathbb{D}(X_i)$ kell, akkor is jár a pont.)
(1 pont) A feladat szövege szerint $\mathbb{D}(X_i) = \frac{\mathbb{E}(X_i)}{2}$.
(0 pont) Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(\{\text{az összes ajándék befér a zsákba}\}) = 0{,}98$.
(3 pont) Tehát $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{441} X_i \leq 100) = 0{,}98$.
(4 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{441} X_i - 441 \cdot \mathbb{E}(X_1)}{21 \cdot \mathbb{D}(X_1)} \leq \frac{100 - 441 \cdot \mathbb{E}(X_1)}{21 \cdot \mathbb{D}(X_1)}\right) = 0{,}98$$

(Logikailag helyes, de csak részlegesen sztenderdizált formulára legfeljebb 2 pont adható.)

(0 pont) Mivel X_i-k egymástól független, azonos eloszlású val. változók, ezért
(2 pont) a centrális határeloszlás-tétel miatt
(4 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{441} X_i - 441 \cdot \mathbb{E}(X_1)}{21 \cdot \mathbb{D}(X_1)}$ közelítőleg standard normális eloszlású.
(3 pont) $\Phi\left(\frac{100 - 441\,\mathbb{E}(X_1)}{21 \cdot \mathbb{D}(X_1)}\right) \approx 0{,}98$
(1 pont) (Mivel Φ szigorúan monoton, és) $\Phi^{-1}(0{,}98) = 2{,}05$, ezért
(1 pont) $\frac{100 - 441\,\mathbb{E}(X_1)}{21 \cdot \mathbb{D}(X_1)} = 2{,}05$
(2 pont) Behelyettesítve: $2{,}05 = \frac{100 - 441 \cdot 2 \cdot \mathbb{D}(X_1)}{21 \cdot \mathbb{D}(X_1)}$
(1 pont) Átrendezve: $43{,}05 \cdot \mathbb{D}(X_1) = 100 - 441 \cdot 2 \cdot \mathbb{D}(X_1)$
(1 pont) $\mathbb{D}(X_1) \approx \underline{\underline{0{,}1081}}$

3.* Tegyük fel, hogy X és Y olyan valószínűségi változók, hogy Y lineáris regressziója X-re $1 + \frac{1}{2}X$, illetve X lineáris regressziója Y-ra $1 + \frac{1}{2}Y$.
Hűbele Balu a következő nagyvonalú érveléssel áll elő: ha Y körülbelül $1 + \frac{1}{2}X$, és X nagyjából $1 + \frac{1}{2}Y$, akkor Y többé-kevésbé megegyezik $1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}Y)$-nal. Iterálva ezeket a behelyettesítéseket, kapja, hogy Y lényegében

$$1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}(1 + \ldots)) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Tehát Balu szerint $Y = 2$. Indokoljuk vagy cáfoljuk meg Balu állítását, miszerint $Y = 2$. (Az állításhoz vezető lépések helyességét nem kell vizsgáljuk.)

(2 pont) Az Y-nak az X-re vett lineáris regressziójából következik, hogy $\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}$. Az X lineáris regressziójából hasonlóan $\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(Y)}$.
(2 pont) Ebből következik, hogy $\mathbb{D}^2(Y) = 2 \cdot \mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{D}^2(X)$.
(2 pont) Y-nak az X-re vett lineáris regresszójából azt is kiolvashatjuk, hogy $1 = \mathbb{E}\,Y - \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}\,\mathbb{E}\,X$.
(1 pont) Az első egyenletet a másodikba helyettesítve: $1 = \mathbb{E}\,Y - \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,X$.
(1 pont) Hasonlóan: $1 = \mathbb{E}\,X - \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,Y$.
(0 pont) Ebből $\mathbb{E}\,X$-et kifejezve: $\mathbb{E}\,X = 1 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,Y$.
(0 pont) Ezt az első egyenletbe helyettesítve: $1 = \mathbb{E}\,Y - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,Y)$.
(2 pont) $\mathbb{E}\,Y = 2 = \mathbb{E}\,X$
(2 pont) Ötlet: Konstruáljunk egy $\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$ val. vektorváltozót mely teljesíti a várható értékre, szórásnégyzetre, kovarianciára vonatkozó fenti feltételeket. (Ha a korábbi X és Y jelölés van használva X' és Y' helyett, szintén jár a teljes pont.)
(4 pont) Legyen $\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} \sim N(\underline{m}, \underline{\underline{\Sigma}})$ kétdimenziós normális, ahol:
(2 pont) $\underline{m} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
($\underline{\underline{\Sigma}}$ bármely $\lambda > 0$ szorosa is megfelelő kovarianciamátrixnak. Más eloszlású helyes ellenpélda felírására szintén jár a 4+2 pont. Az innentől kezdődő pontok a ellenpélda tulajdonságainak ellenőrzésére adandók.)
(3 pont) A kovariancia és szórásnégyzet ismeretében Y'-nek az X'-re vett lineáris regressziója $\frac{1}{2}X' + 2 - \frac{1}{2} \cdot 2$, és ugyanígy X'-nek az Y'-re vett lineáris regressziója $\frac{1}{2}Y' + 2 - \frac{1}{2} \cdot 2$.
(2 pont) $X', Y' \sim N(2; 2)$, ezért: X' nem a konstans 2.
(1 pont) Az $\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$ vektorvalváltozó teljesíti az X-re és Y-ra a feladat által előírt feltételeket, azonban Y' nem a konstans 2.
(1 pont) Tehát Balu állítása $\underline{\underline{\text{hamis}}}$.