Vizsgadolgozat
a koronavírus-járvány idején szervezett számonkéréshez

Tudnivalók: A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód. A munkaidő 45 perc (+15 perc a megoldások feltöltésére). A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését.

---

1. Béla felhívja a Lajhár Zagyvál Kft. telefonos ügyfélszolgálatát. Itt három ügyintézőhöz kapcsolhatják: $\frac{1}{4}$ eséllyel az 1-es ügyintézővel beszél, aki $\mathrm{Exp}(\frac{1}{t})$ eloszlású idő alatt oldja meg a problémáját, $\frac{1}{3}$ eséllyel a 2-es ügyintézővel, aki $\mathrm{Exp}(\frac{2}{t})$ eloszlású idő alatt oldja meg a problémáját (mindkét esetben órában számolva), ahol t pozitív valós szám. Egyéb esetben a 3-as számú ügyintézőhöz kerül, aki konstans 1 óra alatt segít neki. Jelölje Béla várakozási idejét Y.

   a) Határozzuk meg $\mathbb{E}(Y)$ értékét t függvényében.

   b) Legyen $T \sim \mathrm{Exp}(5)$, továbbá Z egy olyan valószínűségi változó, aminek a $T = t$ feltétel esetén éppen az a) részből adódó (t-től függő) $\mathbb{E}(Y)$ a várható értéke. Határozzuk meg $\mathbb{E}(Z)$ értékét.

2. A Mikulás épp 441 ajándékot próbál belepakolni a zsákjába. Az egyes ajándékok térfogata egymástól független, azonos eloszlású. Tudjuk továbbá, hogy az egyes ajándékok (m^3-ben számolt) térfogatának szórása megegyezik a térfogatuk várható értékének a felével. A zsákba legfeljebb 100 m^3 ajándék fér. Mekkora az egyes ajándékok térfogatának szórása, ha 98% eséllyel az összes ajándék belefér a zsákba? (A Mikulás varázszsákjában az ajándékok mind alkalmasan deformálódnak, így feltehető, hogy a térfogataik összeadódnak.)

3.* Tegyük fel, hogy X és Y olyan valószínűségi változók, hogy Y lineáris regressziója X-re $1+\frac{1}{2}X$, illetve X lineáris regressziója Y-ra $1+\frac{1}{2}Y$.

   Hűbele Balu a következő nagyvonalú érveléssel áll elő: ha Y körülbelül $1+\frac{1}{2}X$, és X nagyjából $1+\frac{1}{2}Y$, akkor Y többé-kevésbé megegyezik $1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}Y)$-nal. Iterálva ezeket a behelyettesítéseket, azt kapja, hogy Y lényegében

$$1+\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2}(1+\ldots)) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2.$$

   Tehát Balu szerint $Y = 2$. Indokoljuk vagy cáfoljuk meg Balu állítását, miszerint $Y = 2$. (Az állításhoz vezető lépések helyességét nem kell vizsgáljuk.)