Vizsgadolgozat
a koronavírus-járvány idején szervezett számonkéréshez
Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Artimetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Egy szigeten háromféle sárkány él: 1-es, 2-es és 3-as típusú. Mindhárom típusnak az elsődleges feje mellett lehetnek további fejei. Az extra fejek száma az i-edik típus esetén $\mathrm{Pois}(i)$ eloszlású ($i = 1, 2, 3$).
   (a) Mi a valószínűsége, hogy az első sárkány akivel találkozunk egyfejű, ha $\frac{i}{6}$ valószínűséggel találkozunk i-edik típusú sárkánnyal?
   (b) Néhány millió évvel később a sárkányfajok keveredése miatt már nincs három elkülöníthető faj: egy találomra választott egyed extra fejeinek száma $\mathrm{Pois}(u)$ eloszlású, ahol u egyenletesen véletlenszerű az $[1; 3]$ intervallumban. Mi a valószínűsége, hogy egy találomra választott sárkány egyfejű?

   a) rész:
   (1 pont) Jelölje A_1, A_2, A_3 azon eseményeket, hogy az 1-es, 2-es és 3-as típusú sárkánnyal találkozunk. Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A_i) = \frac{i}{6}$ $(i = 1, 2, 3)$
   (1 pont) Jelölje B azt az eseményt, hogy egyfejű sárkánnyal találkozunk. $\mathbb{P}(B) =?$
   (0 pont) Jelölje $X_i \sim \mathrm{Pois}(i)$ egy i-edik típusú sárkány extra fejeinek számát.
   (1 pont) A (diszkrét) teljes valószínűség tétele miatt
   (3 pont) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B \mid A_3)\,\mathbb{P}(A_3)$
   (1 pont) hiszen A_1, A_2, A_3 teljes eseményrendszer.
   (1 pont) $\mathbb{P}(B \mid A_i) = \mathbb{P}(X_i = 0)$
   (1 pont) $= \frac{i^0}{0!}e^{-i} = e^{-i}$
   (1 pont) Tehát $\mathbb{P}(B) = e^{-1} \cdot \frac{1}{6} + e^{-2} \cdot \frac{2}{6} + e^{-3} \cdot \frac{3}{6}$
   (1 pont) $\approx \underline{\underline{0{,}1313}}$

   b) rész:
   (1 pont) Jelölje B azt az eseményt, hogy a találomra választott sárkány egyfejű. $\mathbb{P}(B) =?$
   (1 pont) Legyen $X \sim U(1; 3)$ a sárkány típusát jelölő valószínségi változó.
   (1 pont) A (folytonos) teljes valószínűség tétele miatt
   (3 pont) $\mathbb{P}(B) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid X = x) f_X(x) \mathrm{d}x$
   (2 pont) $f_X(x) = \frac{1}{2}$ ha $1 < x < 3$ és 0 egyébként
   (2 pont) $\mathbb{P}(B \mid X = x) = \frac{x^0}{0!}e^{-x} = e^{-x}$

(2 pont) $\mathbb{P}(B) = \int_1^3 e^{-x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x$
(1 pont) $= \frac{-1+e^2}{2e^3}$
(1 pont) $\approx \underline{\underline{0{,}1590}}$

2. Legyen az (X, Y) folytonos valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye
$$F_{X,Y}(x, y) = \frac{xy^3 + x^2y}{10}$$
ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$, továbbá tudjuk, hogy X értékkészlete a $[0; 1]$, míg Y értékkészlete a $[0; 2]$ intervallum. Adjuk meg az $\mathbb{E}(XY \mid X)$ regressziót.

(A "ha ... és 0 egyébként" kiegészítések lehagyása miatt maximum 2 pont veszthető a feladat során.)
(3 pont) $\mathbb{E}(XY \mid X) = X\,\mathbb{E}(Y \mid X)$
(2 pont) $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y \mid x)\mathrm{d}y$
(Ha ehelyett $\mathbb{E}(XY \mid X = x)$-re van felírva az integrál, akkor is jár a pont, de persze csak helyes integrálra, pl. $\int_{-\infty}^{\infty} u f_{XY|X}(u \mid x)\mathrm{d}u$ helyes alak.)
(2 pont) $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ ha $f_X(x)$ nem nulla és 0 egyébként
(Ha a nevező az együttes sűrűségfüggvény integráljával van megadva, akkor is jár a pont.)
(2 pont) A feladat feltételei esetén $f_{X,Y}(x, y) = \partial_x\partial_y F_{X,Y}(x, y)$ ha a derivált létezik, és 0 egyébként.
(1 pont) Ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$ akkor $f_{X,Y}(x, y) = \partial_x\partial_y\left(\frac{xy^3+x^2y}{10}\right)$.
(1+2 pont) $= \partial_x\left(\frac{x^2+3xy^2}{10}\right) = \frac{2x+3y^2}{10}$ (Ha a köztes lépés nincs kiírva, akkor is jár a 3 pont.)
(2 pont) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y$
(2 pont) $= \int_0^2 \frac{2x+3y^2}{10}\mathrm{d}y$ ha $0 < x < 1$ és 0 egyébként
(1 pont) $= \left[\frac{2xy+y^3}{10}\right]_0^2 = \frac{2x+4}{5}$ (Ha a köztes lépés nincs kiírva, akkor is jár a pont.)
(1 pont) Emiatt $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{2x+3y^2}{4x+8}$ ha $0 < x < 1$ és 0 egyébként
(2 pont) $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_0^2 y\frac{2x+3y^2}{4x+8}\mathrm{d}y$ ha $0 < x < 1$ és 0 egyébként
(1 pont) $= \frac{x+3}{x+2}$
(2 pont) Behelyettesítve $\mathbb{E}(Y \mid X) = \frac{X+3}{X+2}$
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(XY \mid X) = X\,\mathbb{E}(Y \mid X) = \underline{\underline{\frac{X^2+3X}{X+2}}}$

3.* Veszünk 20 zacskó ropit, és azt látjuk, hogy a zacskók átlagos tömege M gramm. Egy zacskóban lévő ropik össztömege normális eloszlással közelíthető, μ várható értékkel és $\frac{1}{2}$ szórással, grammban számolva. Az egyes zacskók tömegei együttesen függetlenek. Mekkorának válasszuk x-et ahhoz, hogy 98% valószínűséggel μ az $[M - x; M + x]$ intervallumba essen?

(1 pont) Jelölje A az $\{\mu \in [M - x; M + x]\}$ eseményt. $\mathbb{P}(A) = 0{,}98$, $x =$?
(1 pont) Jelölje az egyes csomagok tömegeit $X_1, \ldots, X_{20}$.
(1 pont) $A = \{M - x \le \mu \le M + x\}$
(1 pont) levonva M-et és szorozva (-1)-el: $= \{-x \le M - \mu \le x\}$
(1 pont) $= \{-x \le \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i - \mu < x\}$
(3 pont) $= \{-x \le \frac{1}{2\sqrt{20}}\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 20\cdot\mu}{\frac{1}{2}\sqrt{20}} < x\}$ (Olyan alakra jár a pont, ahol a CHT alkalmazható.)
(1 pont) A centrális határeloszlás-tétel miatt
(5 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 20\cdot\mu}{\frac{1}{2}\sqrt{20}}$ közelítőleg $N(0; 1)$ eloszlású
(Sőt, valójában pontosan $N(0; 1)$, tehát ha az az összefüggés van használva, hogy független normális valószínűségi változók összege normális, és tudjuk az összeg paramétereit, akkor is jár a pont.)
(2 pont) Tehát ha $Z \sim N(0; 1)$ akkor $\mathbb{P}(A) \approx \mathbb{P}(-2\sqrt{20}x \le Z \le 2\sqrt{20}x)$
(2 pont) $= \Phi(2\sqrt{20}x) - \Phi(-2\sqrt{20}x)$, hiszen $F_Z = \Phi$
(2 pont) Tudjuk, hogy $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$, ezért
(1 pont) Az eddigiek szerint $0{,}98 = \mathbb{P}(A) = 2\Phi(2\sqrt{20}x) - 1$
(1 pont) Átrendezve $\Phi(2\sqrt{20}x) = 0{,}99$
(2 pont) Kikeresve a Φ értékét: $2\sqrt{20}x = 2{,}33$
(1 pont) $x = \underline{\underline{0{,}2605}}$.