

Vizsgadolgozat

1. Borbála azt a feladatot kapta a valószínűségszámítás vizsgáján, hogy számolja ki az $\mathbb{E}(XY)$ várható értéket az X és Y diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása alapján. Sajnos a vizsgalapjára rálöttyent a kólával kevert energiatalós kávéja, így az együttes eloszlásból csak a következő látszódik:

| | | | | |
|-----|-----|----------------|---------------|---|
| | X | | | |
| Y | | -1 | 0 | 1 |
| 3 | | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | |
| 4 | | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{9}$ | |

ahol $\text{Ran}(X) = \{-1, 0, 1\}$ és $\text{Ran}(Y) = \{3, 4\}$. Borbála biztosan tudja (korábban leellenőrizte), hogy X és Y függetlenek. Meg tudjuk-e válaszolni a feladatot pusztán ennyi információ birtokában? Ha igen, válaszoljuk is meg; ha nem, bizonyítsuk be, hogy nem lehetséges.

2. Legyenek X és Y független, $\text{Exp}(2)$ eloszlású folytonos valószínűségi változók.
- Határozzuk meg $-Y$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.
 - Határozzuk meg $X - Y$ sűrűségfüggvényét.
3. A „Jar-jar” gyár befőttesüvegeket gyárt. Egy üveg gyártási idejének várható értéke 1 időegység, szórása 0,2. A cég 1000 db üveg legyártásához 1010 egység időt kér. (Az egyes üvegek gyártásához szükséges idők függetlenek.)
- Közelítőleg mekkora a valószínűsége, hogy a cég le tudja gyártani az 1000 db üveget az ígért 1010 egység idő alatt?
 - A projektmenedzser javaslatára a cég olcsóbb alapanyagra vált, aminek következtében egy üveg gyártási idejének szórása 0,48-ra növekszik. Közelítőleg mennyi időt kérjen a cég, ha az 1000 db üveget ugyanakkora valószínűséggel szeretné időben legyártani, mint korábban?
4. Legyen $Z \sim U(0; 2)$ folytonos valószínűségi változó.
- Határozzuk meg a $\text{cov}(Z^2, 3Z - 2)$ mennyiséget.
 - Határozzuk meg Z^2 lineáris regresszióját $3Z - 2$ -re.
5. Bertold részt vesz egy nyereményjátékban. A nyeremény nagyságának meghatározásához egy szabálytalan érmével dobhat addig, amíg fejet nem kap. Jelölje X azt, hogy hanyadik próbálkozásra kapott először fejet. A nyereményének az $\{X = k + 1\}$ eseményre vett feltételes várható értéke $\left(\frac{3}{2}\right)^k$. Tegyük fel, hogy X várható értéke $\frac{3}{2}$. Határozzuk meg a nyeremény várható értékét.
- 6.* Legyenek X és Y független, folytonos valószínűségi változók. Igaz-e, hogy

$$\mathbb{E}(F_X(Y)) = \mathbb{P}(X < Y) ?$$

Ha igen, bizonyítsuk be; ha nem, adjunk ellenpéldát.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

