

Vizsgadolgozat

1. Bonifác fonetikus fogyókúrába kezd, azaz minden héten véletlenszerűen kiválasztja a hét egy hétköznapját, és aznap annyi kilométert fut, ahány mássalhangzó van az adott hétköznap nevében. A véletlenszerű választás nem egyenletes: az egyes hétköznapokat olyan arányban választja, ahány magánhangzó van a nap nevében. (Bonifác más napokon nem fut. Hétvégén pláne nem.) Mennyi az egy héten futott kilométerek számának várható értéke és szórásnégyzete?

A darabszámokat és összegeiket a következő táblázat foglalja össze (pl. "dd" illetve "sz" egy hangnak számít):

Nap	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Σ
Mássalhangzók száma	3	2	3	5	4	17
Magánhangzók száma	2	1	2	3	2	10

2. Legyen (X, Y) olyan folytonos valószínűségi vektorváltozó, aminek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_{X,Y} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{2x} & \text{ha } 1 < x < 3 \text{ és } 0 < y < x, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\text{cov}(X, Y)$ -t.

3. Egy gépnek egymás után 50 utasítást kell végrehajtania, amelyek véletlenszerű ideig tartanak. Az egyes utasítások végrehajtásához szükséges idők egymástól függetlenek és azonos eloszlásúak. Az egy utasításhoz szükséges idő várható értéke éppen az egy utasításhoz szükséges idő szórásának a duplája. Mennyi a valószínűsége, hogy az összes utasítás végrehajtásához szükséges idő több, mint 10%-kal haladja meg az összes utasításhoz szükséges idő várható értékét?
4. Legyen (X, Y) olyan valószínűségi vektorváltozó, aminek sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}$ ha $y \geq x \geq 0$, és 0 egyébként. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(Y|X)$ regressziót.
5. Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy X számot a $[0; \frac{1}{3}]$ intervallumból. Ezután készítünk egy dobókockát, ami éppen úgy szabálytalan, hogy mindegyik páros számot X és mindegyik páratlan számot $\frac{1}{3} - X$ eséllyel adja eredményül. Ezzel a kockával dobunk kétszer.
- a) Az $\{X = x\}$ feltétel esetén mekkora a valószínűsége, hogy két egyformát dobunk ($0 < x < \frac{1}{3}$)?
 b) Nem tudván X értékét, mi a valószínűsége, hogy két egyformát dobunk?

- 6.* Legyen (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó, aminek sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{1}{8}((x-3)^2 + (y-3)^2)} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg $\mathbb{D}^2(XY)$ -t.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

