

Vizsgadolgozat

1. Bélának két szabálytalan érme van a zsebében: egy olyan, ami $\frac{1}{3}$ eséllyel esik a fej oldalára, illetve egy olyan, aminek mindkét oldala írás. Véletlenszerűen előveszi az egyik érmét, és dob vele négyszer. Feltéve, hogy páros sok írást lát, mi az esélye, hogy az első érmét húzta?
2. Válasszunk ki egyenletesen véletlenszerűen egy (U, V) pontot a $[0; 1] \times [0; 1]$ egységnégyzetből. Legyen $X = \sqrt{U}$ és $Y = \sqrt{V}$.
 - a) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.
 - b) Határozzuk meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét.
3. Bence rendelt n zsák I.Z.-t. Az egyes zsákokban lévő I.Z. mennyisége véletlenszerű: várhatóan 10 kg-ot tartalmaz, de 2 kg szórással. (A különböző zsákokban lévő mennyiségek függetlenek.) Ha a várható $10n$ kg-nál legalább 20 kg-mal több I.Z. érkezik, akkor a 20 kg extrán felüli részt kidobja. Tegyük fel, hogy Bence 0,0336 valószínűséggel dob ki valamennyi I.Z.-t. Hány zsákot rendelhetett?
4. A képzeletbeli Szurrealíziában a vasúttársaság örökifjú stratégiát követ. Ez sajnos nem a vonatok belső állapotára utal, hanem azt jelenti, hogy egy vonat késésének ideje örökifjú eloszlású, folytonos, pozitív értékű valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy egy késés átlagos ideje 3 fertályóra. A vasúttársaság a késés mértékének függvényében panaszlevelet kap. Rögzített x fertályóra késés esetén a panaszlevelek egymástól független, azonos, de egyenként kis valószínűségű események. Ha egy vonat x fertályórát késik, akkor annak a valószínűsége, hogy egy panaszlevelet sem kapnak e^{-100x} .
 - a) Mi a panaszlevelek számának (feltételes) várható értéke, ha rögzített x idejű késéssel számolunk.
 - b) Várhatóan hány levelet kap a vasúttársaság egy adott vonat késése miatt?
5. Legyen $(X, Y) \sim N(\underline{0}, \underline{\Sigma})$ kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Tegyük fel, hogy $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(Y)$, X és Y korrelációja 0,5, és $\det(\underline{\Sigma}) = 12$.
 - a) Határozzuk meg $\underline{\Sigma}$ -t.
 - b) Hány százalék az esélye, hogy X nagyobb, mint 3,6?
- 6.* Legyen (U, V) valószínűségi vektorváltozó. Tegyük fel, hogy $\mathbb{D}^2(U)$, $\mathbb{D}^2(V)$ és $\text{cov}(U, V)$ pozitív valós számok. Legyen V lineáris regressziója U -ra $\beta_1 U + \alpha_1$, és U lineáris regressziója $-V$ -re $\beta_2(-V) + \alpha_2$. Tegyük fel, hogy az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \beta_1 x + \alpha_1\}$ egyenes merőleges az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \beta_2 x + \alpha_2\}$ egyenesre. Mit mondhatunk V eloszlásáról, ha tudjuk, hogy U exponenciális eloszlású? És ha feltesszük, hogy $\alpha_1 = \alpha_2$?

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

